

---

## TP numérique sous Matlab "ondes en géophysique et ajustement géostrophique"

---

*Durée : 4 heures*

L'objectif de ce TP est de réaliser des simulations numériques pour étudier un problème d'ajustement d'un écoulement à surface libre, en présence ou non de rotation du référentiel. Pour simplifier le problème, on se place dans une configuration 1D horizontale infinie selon une direction de l'espace notée  $x$ . On considère une couche de fluide initialement au repos, d'épaisseur  $H$ , sur laquelle on vient rajouter une perturbation initiale de surface libre notée  $\eta(x, t = 0)$ . A l'instant initial ( $t = 0$ ), le profil de surface libre est donc  $h(x, t = 0) = H + \eta(x, t = 0)$ .

On souhaite étudier l'évolution temporelle de la couche de fluide sous l'action combinée de la gravité (accélération de la pesanteur  $g$ ) et/ou de la rotation du référentiel (paramètre de Coriolis  $f$ ). L'écoulement étant initialement au repos, il n'y a pas de vorticité initiale, et l'évolution spatio-temporelle est celle d'un écoulement potentiel instationnaire. Dans le cours (cf M1 "fluides"), les équations exactes ont été démontrées, et vont générer une panoplie très large de processus, y compris des phénomènes très non linéaires (soliton, mascaret, lâcher de barrage, etc...). Néanmoins, la résolution de ces équations est très coûteuse (méthodes à suivi d'interface, etc...).

Dans le cadre de ce TP, on souhaite utiliser et résoudre des versions "simplifiées" du système d'équations complet. On trouve les simplifications suivantes :

- Pour les écoulements potentiels instationnaires, lorsque la déviation de la surface libre  $\eta$  reste petite devant  $H$ , on peut linéariser le système d'équations et aboutir à une équation d'ondes dispersives, les ondes de gravité. Dans ce cas, on dispose d'une base infinie de fonctions orthogonales qui permet de décomposer toute condition initiale sur cette base, et de recalculer la forme du profil à un instant ultérieur  $t$ .
- Pour des écoulements pour lesquels les échelles horizontales sont grandes devant les échelles verticales, on peut simplifier les équations en faisant l'hypothèse d'hydrostatie, et en supposant que les composantes  $u$  et  $v$  sont indépendantes de  $z$ . On aboutit alors aux équations de Saint-Venant ("shallow water" en anglais). On parle aussi d'hypothèse d'onde longue. Les équations obtenues restent tout de même non-linéaires et sont largement utilisées pour décrire par exemple les lâchers de barrage et les écoulements géophysiques à grande échelle.
- On peut également utiliser la version linéarisée des équations de Saint Venant lorsque la perturbation  $\eta$  est petite devant  $H$ .

On fournit trois programmes matlab résolvant les systèmes ci-dessus :

- un solveur du problème aux valeurs initiales pour différentes familles d'onde (relation de dispersion complète des ondes de surface, relation de dispersion des ondes longues, relation de dispersion des ondes de Poincaré). Il repose sur une décomposition en spectral de la condition initiale sur la base de fonctions orthogonales, et le calcul à tout instant  $t$  ultérieur. Le programme s'appelle "OndesEvolution.m"
- un solveur des équations de Saint-Venant complètes, développé par Laurent Lacaze et appelé « SWexactLL.m »
- un solveur des équations de saint-venant linéarisées, adapté de Durran1998, et appelé « SWlinearise.m »

## A. Equations résolues

1. Rappeler la relation de dispersion pour les ondes de gravité dans le cas de la théorie potentielle linéarisée
2. Dans l'hypothèse des équations de Saint-Venant, rappeler les équations pour  $h$ ,  $u$  et  $v$  en tenant compte de la rotation terrestre (paramètre  $f$ ).
3. En linéarisant les équations de Saint-Venant, retrouver l'équation des ondes de gravité sans rotation.

## B. Problème de propagation linéaire d'ondes de surface

En utilisant la fonction "OndesEvolution.m" pour différents types d'onde et différentes conditions initiales (impulsion type caillou dans l'eau ou marche d'eau), interpréter l'évolution obtenue en fonction du caractère dispersif ou non des ondes étudiées. Expliquer cela au moyen de la relation de dispersion des ondes utilisées.

Comparer le résultat obtenu avec cette approche linéaire au résultat exact pour des situation très non linéaires (écart important de hauteur d'eau) obtenues au moyen de "SWexactLL.m".

## C. Problème d'ajustement avec ou sans rotation d'une surélévation d'eau

On considère le problème de l'ajustement d'une condition initiale consistant en une surélévation d'eau localisée, d'abord sans rotation, puis avec rotation.

Au moyen des trois programmes, analyser l'évolution temporelle en fonction des échelles spatiales de la marche d'eau initiale (largeur, épaisseur, épaisseur de la couche d'eau).

Dans le cas avec rotation, analyser le rendement énergétique de l'ajustement dit « géostrophique » en comparant l'énergie initiale avec l'énergie finale lorsque la partie ondulatoire s'est échappée au loin.