



Écoulements Géophysiques

Cours ISAE

version Avril 2019

dans le cadre de la formation

Exercices
pour 1A et 2A

par

Frédéric Y. Moulin

Composition de l'équipe pédagogique

Mis en page avec la classe thloria.

Table des matières

Chapitre 1 Quantification des effets de rotation et de stratification et nombres adimensionnels associés	1
1.1 Importance de la rotation terrestre dans l’océan et l’atmosphère	1
1.2 Importance de la rotation de Jupiter sur la dynamique de sa grande tâche rouge .	2
1.3 Stratification de l’atmosphère terrestre	2
1.4 Pendule de Foucault	4
1.5 Dimensionnement d’une étude en laboratoire de l’effet d’« eau morte » dans un fjord norvégien	5
1.6 Dimensionnement d’une étude en laboratoire d’ondes internes générées par un relief	6
1.7 Effet de compressibilité pour les océans	7
Annexes	9
Annexe A Elements de correction du TD1	9
A.1 Stratification de l’atmosphère terrestre	9
Bibliographie	11

Quantification des effets de rotation et de stratification et nombres adimensionnels associés

1.1 Importance de la rotation terrestre dans l'océan et l'atmosphère

Voici quelques phénomènes typiques rencontrés dans l'océan et l'atmosphère, ainsi que les échelles qui leur sont associées (L une longueur horizontale, U une vitesse et T un temps). Dans quelle mesure la rotation terrestre doit-elle être prise en compte dans la modélisation de ces phénomènes ?

	L	U	T
Atmosphère terrestre			
microturbulence	10-100 <i>cm</i>	5-50 <i>cms</i> ⁻¹	quelques secondes
orages	quelques <i>km</i>	1-10 <i>ms</i> ⁻¹	quelques heures
brise de mer	5-50 <i>km</i>	1-10 <i>ms</i> ⁻¹	6 heures
tornade	10-500 <i>m</i>	30-100 <i>ms</i> ⁻¹	10-60 minutes
ouragan	300-500 <i>km</i>	30-60 <i>ms</i> ⁻¹	quelques jours
ondes topographiques	10-100 <i>km</i>	1-20 <i>ms</i> ⁻¹	quelques jours
structures météorologiques	100-5000 <i>km</i>	1-50 <i>ms</i> ⁻¹	quelques semaines
Océans			
microturbulence	10-100 <i>cm</i>	1-10 <i>cms</i> ⁻¹	10-100 s
ondes internes	1-20 <i>km</i>	0.05-0.5 <i>ms</i> ⁻¹	minutes à heures
marées	bassin océanique	1-100 <i>cms</i> ⁻¹	heures
remontée côtière (upwelling)	1-10 <i>km</i>	0.1-1 <i>ms</i> ⁻¹	plusieurs jours
fronts	1-20 <i>km</i>	0.5-5 <i>ms</i> ⁻¹	quelques jours
tourbillons (eddies)	5-100 <i>km</i>	0.1-1 <i>ms</i> ⁻¹	jours à semaines
courants principaux	50-500 <i>km</i>	0.5-2 <i>ms</i> ⁻¹	semaines à saison
grands tourbillons de circulation (gyre)	bassin océanique	0.01-0.1 <i>ms</i> ⁻¹	dizaines d'année

1.2 Importance de la rotation de Jupiter sur la dynamique de sa grande tâche rouge

Cette grande tâche (voir *Figure 1.1*) est localisée à 22°S et s'étend sur 12° en latitude et 25° en longitude. Les vitesses de vent qui lui sont associées atteignent 100 m s^{-1} . Le rayon planétaire et la période de rotation valent respectivement 71400 km et 9h50m pour Jupiter. Avec ces éléments, la rotation de Jupiter joue-t-elle un rôle ou non dans la dynamique de la grande tâche ?



FIGURE 1.1 – Photographie de Jupiter (à gauche) et de sa grande tâche rouge (à droite).

1.3 Stratification de l'atmosphère terrestre

Dans cet exercice, on propose d'étudier plusieurs modèles d'atmosphère « classiques » et de les comparer au profil standard de l'atmosphère terrestre. Cela permettra également de déterminer la force de la stratification et de comparer avec les valeurs typiques utilisées en cours pour calculer le rayon de déformation de Rossby de la troposphère.

Atmosphère isotherme

On considère que l'air atmosphérique se comporte comme un gaz parfait. On suppose que la température est uniforme, égale à la température au sol T_o . La pression au sol est notée P_o .

1. En supposant une atmosphère au repos dans un champ de pesanteur $g = 9.81\text{ m s}^{-2}$ constant, déterminer les profils verticaux de pression $P(z)$ et de densité $\rho(z)$ de cette atmosphère dite « isotherme ».

Indication : écrire l'équation traduisant l'équilibre hydrostatique, puis la transformer en une équation différentielle portant sur ρ .

2. On note $z_0 = RT_o/(gM)$ où M est la masse molaire moyenne du gaz atmosphérique. Quelle valeur de z_0 trouvez-vous pour l'atmosphère terrestre ?

Altitude (m)	Accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$)	Température ($^{\circ}K$)	Nombre Volumique (m^{-3})	Masse Volumique ($kg.m^{-3}$)	Rapport des masses volumiques	Célérité du son ($m.s^{-1}$)	Rapport des viscosités cinématiques	Rapport des conductivités thermiques	Rapport des pressions
0	9,8066	288	2,54e25	1,22	1	340	1	1	1
1000	9,8036	281	2,31e25	1,11	0,90	336	1,08	0,979	0,887
2000	9,8005	275	2,09e25	1,00	0,82	332	1,17	0,959	0,784
3000	9,7974	268	1,89e25	0,90	0,74	328	1,27		0,692
4000	9,7943	262	1,70e25	0,82	0,66	324	1,38	0,918	0,608
5000	9,7912	255	1,53e25	0,73	0,60	320	1,51	0,897	0,533
6000	9,7882	249	1,37e25	0,66	0,53	316	1,65	0,876	0,466
7000	9,7851	242	1,22e25	0,59	0,48	312	1,81	0,855	0,405
8000	9,7820	236	1,09e25	0,52	0,42	308	1,98	0,834	0,351
9000	9,7789	229	9,70e24	0,46	0,38	303	2,18	0,813	0,303
10000	9,7759	223	8,50e24	0,41	0,33	299	2,41	0,790	0,261
11000	9,7728	216	7,58e24	0,36	0,29	295	2,66	0,770	0,224
12000	9,7697	216	6,48e24	0,31	0,25	295	3,11	0,770	0,191
13000	9,7667	216	5,54e24	0,26	0,21	295	3,65	0,770	0,163
14000	9,7636	216	4,73e24	0,22	0,18	295	4,27	0,770	0,139
15000	9,7605	216	4,04e24	0,19	0,15	295	4,99	0,770	0,119
16000	9,7575	216	3,46e24	0,16	0,13	295	5,84	0,770	0,102
17000	9,7544	216	2,95e24	0,14	0,11	295	6,83	0,770	0,087
18000	9,7513	216	2,52e24	0,12	0,09	295	8,00	0,770	0,0746
19000	9,7483	216	2,16e24	0,10	0,08	295	9,35	0,770	0,0638
20000	9,7452	216	1,84e24	0,08	0,07	295	10,9	0,770	0,0545

FIGURE 1.2 – Données pour l'atmosphère terrestre « standard ».

Atmosphère neutre ou « adiabatique »

Cette fois, on considère un air complètement mélangé, pour lequel il n'y a plus d'effet de stratification : toute particule d'air déplacée verticalement d'une distance δ_z sans échange de chaleur se retrouvera exactement à la même densité que l'air environnant.

3. retrouver la loi $PV^\gamma = c_{ste}$ pour l'évolution adiabatique d'un gaz parfait. Pour l'atmosphère terrestre, quelle valeur de γ convient-il de prendre ?
4. transformer la loi précédente en une loi portant sur P et T . Différencier cette loi puis utiliser l'équation traduisant l'équilibre hydrostatique pour obtenir une équation différentielle portant sur $T(z)$.
5. En déduire les profils verticaux de $T(z)$, $P(z)$ et $\rho(z)$ en fonction de z_0 et γ . Que vaut l'épaisseur de l'atmosphère terrestre avec ce modèle ?

Atmosphère standard

On donne dans la *Figure 1.2* les données pour l'atmosphère dite « standard » (moyenne spatio-temporelle à l'échelle du globe et de plusieurs années).

6. Comparer ces données avec les modèles obtenus aux questions 1 et 2. Vous pouvez par exemple calculer l'évolution de la pression et de la température avec l'altitude à partir de la surface pour les deux modèles d'atmosphère développés ci-dessus. Vous pouvez tracer ces profils verticaux théoriques et le profil vertical d'atmosphère standard.

7. Pour la troposphère (altitude inférieure à 11000 mètres), on a utilisé en cours pour calculer le rayon de déformation interne de Rossby (L_D) des valeurs typiques $\rho_0 = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$, $\Delta\rho = 0.03 \text{ kgm}^{-3}$ et $H = 5000 \text{ m}$. D'où viennent ces valeurs ?
8. Estimer la fréquence caractéristique N (fréquence de flottaison) de la stratification dans la troposphère et dans la stratosphère (au-delà de 10000 mètres). Vous pourrez pour cela calculer la masse volumique de parcelles d'air de différentes altitudes ramenées à la même pression de référence (masse volumique dite « potentielle »).

1.4 Pendule de Foucault

Pour mettre en évidence l'effet de la rotation terrestre, Foucault construisit un pendule pesant en accrochant une sphère de 28 kg à une corde de 67 mètres reliée au plafond du Panthéon, situé en $48^\circ 52'N$ (voir *Figure 1.3* à gauche). En observant la trace du pendule sur le sol, il put montrer que le plan d'oscillation tournait progressivement et faisait un tour complet en 32h40m environ.

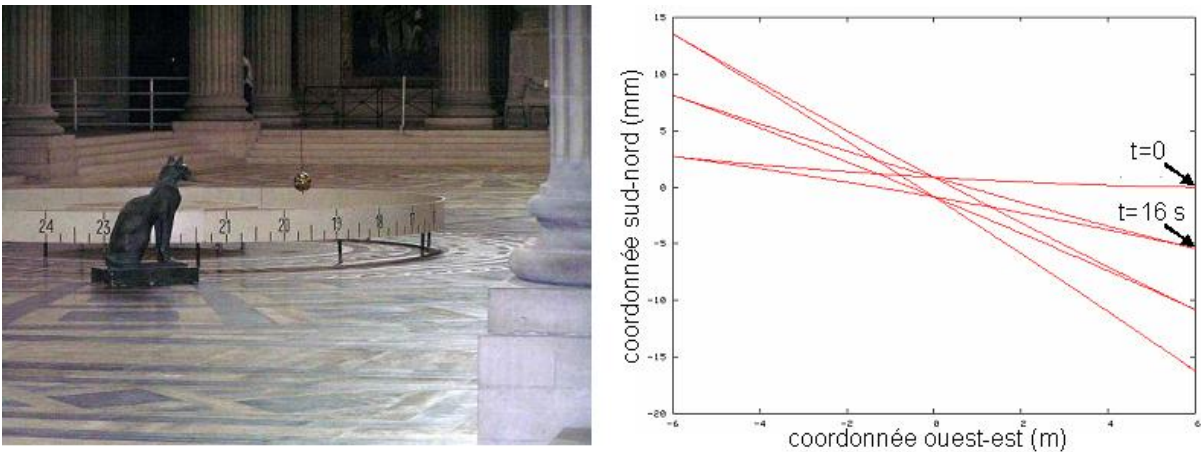


FIGURE 1.3 – Photographie du pendule de Foucault installé au Panthéon (à gauche) et trace du pendule sur le sol pendant les 3 premières oscillations (à droite) pour un départ à vitesse nulle à l'Est.

En ne considérant que de petites oscillations et en notant x et y les positions horizontales du pendule dans la direction ouest-est et sud-nord, faites le bilan des forces agissant sur le pendule (on n'oubliera pas la force de Coriolis !) et montrer que les équations du mouvement se ramènent au système :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\Omega \sin(\lambda) \dot{y} \quad (1.1)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\Omega \sin(\lambda) \dot{x} \quad (1.2)$$

où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, Λ la latitude du Panthéon, et ω_0 la pulsation propre du pendule pesant, i.e. $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ où g est l'accélération locale de la pesanteur, et L la longueur du fil.

Pour déterminer les équations horaires du mouvement, chercher puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$. Comme conditions initiales, utiliser les mêmes que pour le tracé à droite dans la *Figure 1.3*. Votre résultat est-il compatible avec le tracé en question ? En combien de temps le plan d'oscillation aura-t-il fait un tour complet ? Comparer à la mesure de Foucault.

1.5 Dimensionnement d'une étude en laboratoire de l'effet d'« eau morte » dans un fjord norvégien

Comme cela a été signalé en cours, Ekman a observé et analysé au début du siècle le phénomène d'« eau morte » pour des bateaux remontant des fjords norvégiens et qui semblaient ressentir une force de frottement énorme sans génération d'ondes de surface. L'explication tient en la génération d'ondes internes au niveau de l'interface formée entre de l'eau presque douce issue de la fonte des neiges et de l'eau salée.

In situ, on observe la formation d'une couche d'eau faiblement salée ($\rho = 1025 \text{ kgm}^{-3}$, épaisseur $H = 5 \text{ m}$) au dessus d'eau plus lourde ($\rho = 1035 \text{ kgm}^{-3}$). Des bateaux longs de 10 mètres avec une coque pénétrant de 3 mètres dans l'eau et se déplaçant à 0.7 ms^{-1} ressentent cet effet.

On se propose de réaliser en laboratoire une expérience permettant de reproduire et d'étudier le phénomène, comme dans la figure 1.4. On dispose pour cela d'une maquette de bateau de 10 cm de long et 3 cm de profondeur (étrave), d'une cuve longue de 2 m, profonde de 40 cm, que l'on peut remplir avec de l'eau salée (masse volumique réglable entre $\rho = 1000$ et $\rho = 1200 \text{ kgm}^{-3}$, viscosité dynamique $\nu = 0.01 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$).

Proposez un remplissage et un mouvement de la maquette permettant d'observer le même phénomène qu'*in situ*. Plusieurs solutions peuvent être possibles et il faudra justifier proprement votre choix final en faisant usage d'autres nombres sans dimension dans le problème.

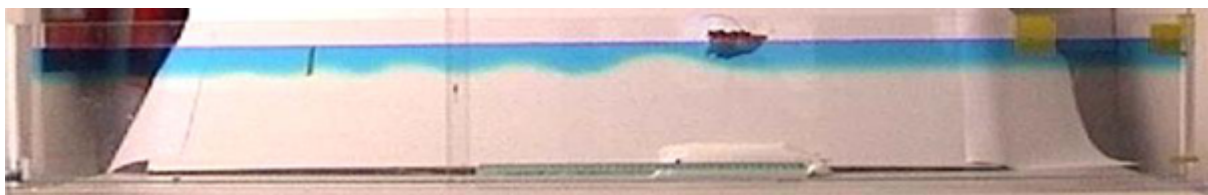


FIGURE 1.4 – Photographie de l'expérience de Maas et Haren (2006).

1.6 Dimensionnement d'une étude en laboratoire d'ondes internes générées par un relief

On souhaite reproduire en laboratoire, dans un canal rempli d'eau salée, la génération d'ondes internes par un écoulement atmosphérique stratifié au-dessus d'une montagne. On utilise pour cela une maquette de montagne que l'on tire à vitesse constante le long du canal. On considère une situation typique observée *in situ* en Hongrie d'ondes générées par la montagne Pillis, localisée en 47.7°N et 18.8°E (données tirées de l'article « Laboratory modelling of atmospheric flow phenomena : Mountain waves », par Balazs Gyüre et Imre M. Janosi). Les grandeurs caractéristiques servant à décrire le phénomène sont données dans la *Figure 1.5*, avec leurs valeurs pour la situation *in situ* dans le *tableau 1.1*.

Compte-tenu des dimensions du canal expérimental (longueur de 2.4 m , hauteur de 40 cm , largeur de 10 cm) et du fait que l'eau salée peut avoir une masse volumique comprise entre 1000 et 1200 kgm^{-3} , proposer un protocole expérimental permettant de reproduire la situation *in situ* (quelles dimensions pour la maquette, quel remplissage, etc...). Justifier également le fait qu'il ne soit pas nécessaire de prendre en compte la rotation de la Terre. Sur la base de nombres sans dimension, discuter des différences possibles entre l'expérience en laboratoire et les observations *in situ*.

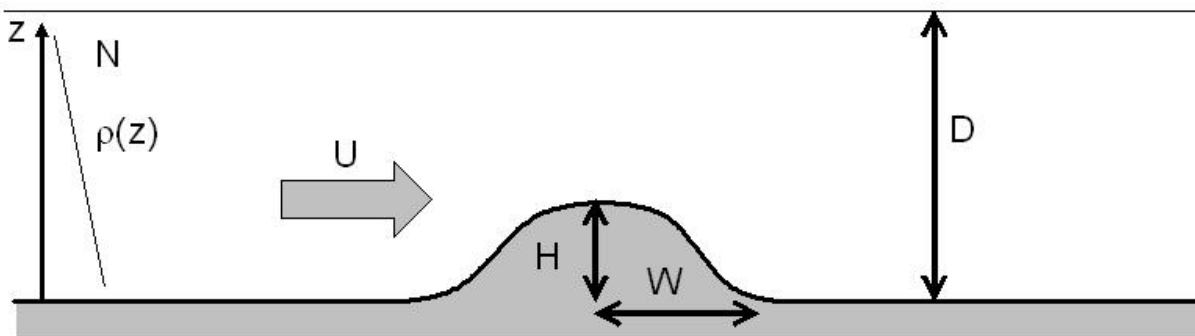


FIGURE 1.5 – Schéma des grandeurs servant à décrire la génération d'ondes internes par un relief.

vitesse incidente U	épaisseur D	hauteur du relief H	demi-largeur du relief W	fréquence de flottaison N
20 ms^{-1}	10 km	650 m	1 km	0.03 s^{-1}

TABLE 1.1 – caractéristiques de l'écoulement *in-situ*.

1.7 Effet de compressibilité pour les océans

La pression augmente avec la profondeur et peut atteindre des valeurs extrêmement élevées, ce qui implique d'utiliser alors une équation d'état adéquate pour l'eau de mer pour déterminer l'évolution de la densité sous l'action de la pression. On se propose ici d'évaluer l'effet de la compressibilité pour de l'eau pure dans l'hypothèse d'un profil adiabatique. Déterminer le profil de densité d'une eau pure pour laquelle vous connaissez la vitesse des ondes acoustiques qui peuvent s'y propager, notée c_s (valeur typique : $c_s = 1482 \text{ ms}^{-1}$). Compte-tenu de la profondeur des océans sur terre, est-il nécessaire de prendre en compte cet effet ?

Indication : relier la célérité c_s à la compressibilité adiabatique de l'eau de mer χ_S et utiliser cette donnée pour déterminer le profil théorique de pression et de masse volumique.

A

Elements de correction du TD1

A.1 Stratification de l'atmosphère terrestre

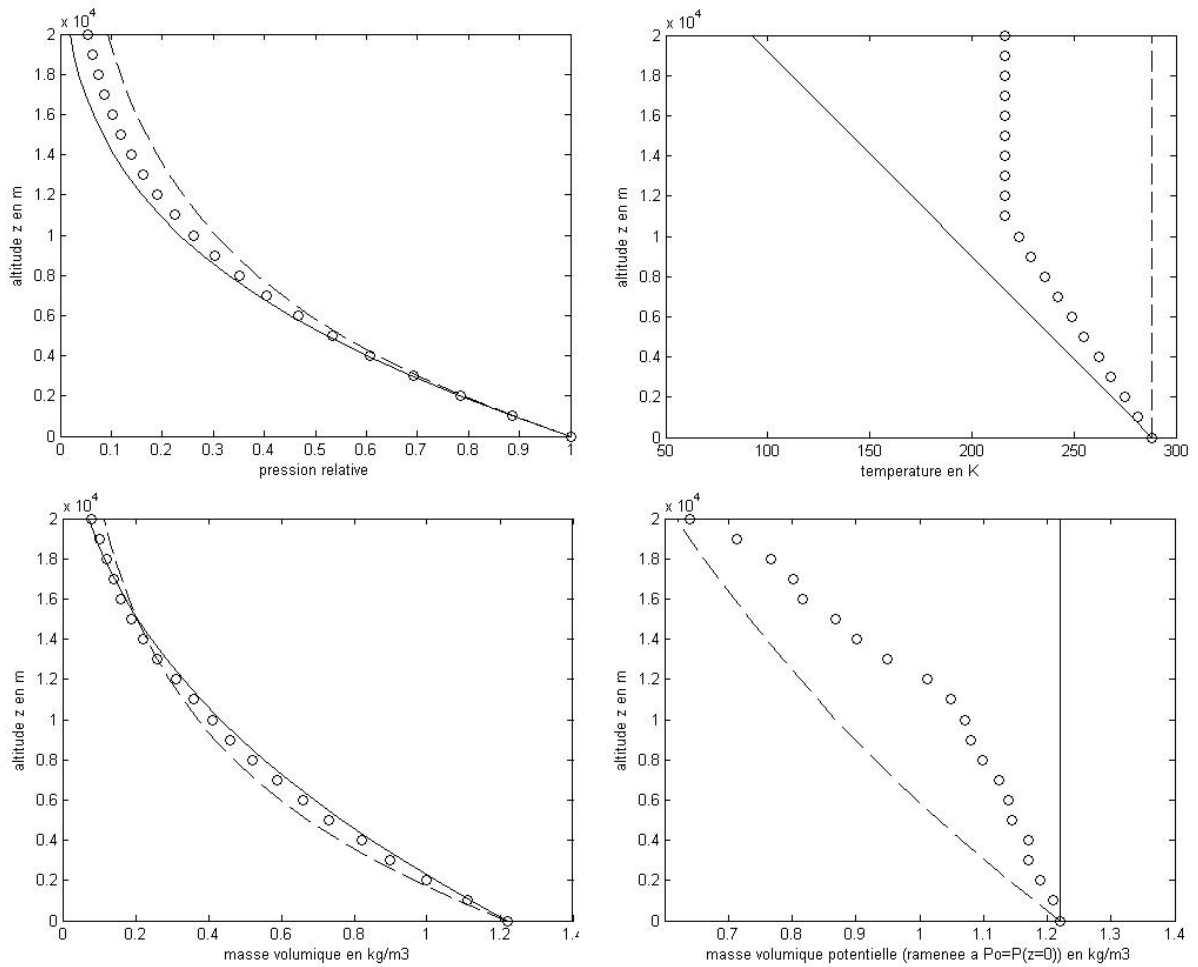


FIGURE A.1 – Profils verticaux pour les atmosphères théoriques (adiabatique en continu, isotherme et pointillés) et l'atmosphère standard (symboles ronds).

Bibliographie

- [Cushman-Roisin (1994)] B. Cushman-Roisin *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice-Hall, 1994. Réédition en cours avec des aspects numériques en plus téléchargement : <http://engineering.dartmouth.edu/~cushman/books/GFD.html>
- [Gill (1987)] A.E. Gill *Atmosphere-Ocean Dynamics*. International Geophysics Series, volume 30, Academic Press, 1982.
- [Lighthill (1978)] J. Lighthill *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [Mellor (1997)] G.L. Mellor *Introduction to Physical Oceanography*. American Institute of Physics, 1997.
- [Pedlosky (1987)] J.K. Pedlosky *Geophysical fluid dynamics*. Springer Verlag, second edition, 1987.
- [Pedlosky (2003)] J.K. Pedlosky *Waves in the ocean and atmosphere : introduction to wave dynamics*. Springer Verlag, 2003.
- [Vallis (2006)] G.K. Vallis *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge, 2006.