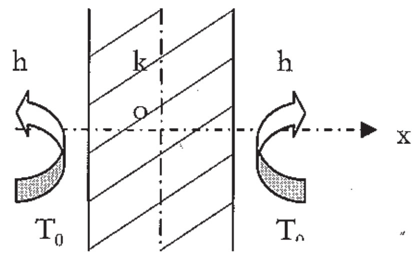
TD n° 2 :
Conduction thermique avec sources internes en régime stationnaire

1°) Soit une plaque plane d'épaisseur L, de températures de surface T1 et T2, soumise sur la face chaude (T1) à un flux de rayonnement micro-ondes conduisant par absorption à une production interne de chaleur sous la forme : P(x) = P(o).exp(-mx) ; P(o) étant la valeur en surface à x = 0.

a) calculer la répartition de température dans le matériau de conductivité k.
b) pour quelle valeur x_m de x cette température est elle maximale.
c) évaluer la puissance engendrée par le rayonnement et vérifier qu'elle est égale
à la somme algébrique des 2flux entrant et sortant par les faces 1 et 2.

2°) On considère un mur infini suivant les directions y et z et d'épaisseur 2L suivant x. La température T est supposée ne dépendre que de x. La conductivité thermique homogène est notée k et les 2 faces échangent de la chaleur par convection (coefficient h) avec un fluide à température uniforme T_0.



L'origine des x est placée dans le plan médian du mur. On suppose que les sources internes de chaleur sont régies par l'expression de la puissance volumique $P(x) = a[1 + \beta(T(x) - T_0)]$ où a et β sont des constants réelles.

a) Ecrire l'équation différentielle décrivant le problème en régime permanent ainsi que le jeu de conditions aux limites. L'une des conditions aux limites pourra prendre en compte la symétrie du problème.
b) Après intégration écrire les lois de distribution des températures T(x) en fonction du signe du groupement $s = \frac{a\beta}{k}$.
c) Etablir les lois de distribution des températures suivant que :
  - a = 0
  - $\beta = 0$ et $a \neq 0$
  - $a\beta > 0$. Expliquer physiquement le comportement singulier de cette dernière solution.

On se place dans ce dernier cas pour les questions d) et e).

d) Que se passe-t-il lorsque le coefficient d'échange h devient infini. Ecrire la solution T(x) correspondante.
e) Calculer alors le flux de chaleur par unité de surface dissipé sur chacune des faces et vérifier globalement la cohérence du résultat.

3°) Soit un cylindre de rayon R = 1 cm représentant une ligne électrique, destinée à transporter sous haute tension un courant I de 1000 A. Sachant que la résistance électrique de la ligne est $\rho_0 = 0.06\ \Omega km^{-1}$;que l'air ambiant est de 30° et que le coefficient d'échange global avec l'extérieur est $H = 18 Wm^{-2}K^{-1}$.

a) calculer la valeur de la source interne volumique de chaleur P.
b) évaluer la distribution de température dans le conducteur électrique en cuivre

($k = 400\ Wm^{-1}K^{-1}$) ; ainsi que la température de surface de la ligne.

c) dans une section droite du câble électrique quel est le rayon où la température est maximale ?

4°) L'ensemble combustible d'un réacteur nucléaire est représenté par une sphère de rayon R de matière fissile, entourée d'une couche sphérique de revêtement de rayon extérieur Ro. La température extérieure du fluide réfrigérant dans lequel baigne l'ensemble est Te, et le coefficient d'échange correspondant de convection est He.
La puissance volumique générée dans le réacteur peut être modélisée par une loi parabolique :

$$P(r) = P(o)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

On appelle k et ko les conductivités thermiques du combustible et du revêtement.

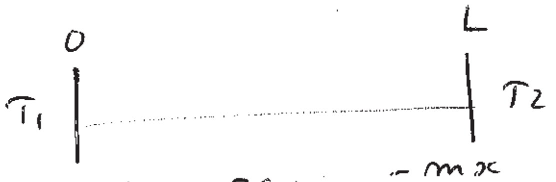
a) calculer le flux thermique total dans le combustible qui sera le flux à évacuer.

b) calculer la répartition de température dans le combustible et le revêtement.

c) montrer que, P(o) et R étant fixés, il existe une valeur de Ro pour laquelle les valeurs des températures dans le combustible sont les plus basses possible.

TD n°2

1°



$T_1 > T_2$

$$P(x) = P(0)\exp^{-mx}$$

a) $\rho c_p \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{0} = \cancel{k}\, k\Delta T + \mathcal{P}$

$$0 = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P(0)\exp^{-mx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \underbrace{-\frac{P(0)}{k}\exp^{-mx}}_{\leqslant 0}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{P(0)}{k}\frac{-1}{m}e^{-mx} + A$$

$$T(x) = -\frac{P(0)}{km^2}e^{-mx} + Ax + B$$

$$\Rightarrow T(0) = T_1 = -\frac{P(0)}{km^2} + B \qquad \Rightarrow B = \frac{P(0)}{km^2} + T_1$$

$$T(L) = T_2 = -\frac{P(0)}{km^2}\exp^{-mL} + AL + \frac{P(0)}{km^2} + T_1$$

$$\Rightarrow AL = T_2 - T_1 + \frac{P(0)}{km^2}\left[\exp^{-mL} - 1\right]$$

$$\Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{P(0)}{km^2 L}\left[\exp^{-mL} - 1\right]$$

donc

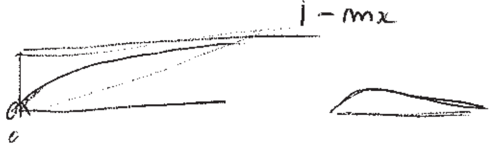
$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + \frac{P(0)}{km^2}\frac{x}{L}\left[\exp^{-mL} - 1\right] + \frac{P(0)}{km^2}\left[1 - \exp^{-mx}\right]$$

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \frac{P(0)}{km^2}\left[\underset{-\exp^{-mx}}{1} - \frac{x}{L}(1 - \exp^{-mL})\right]$$

$$\boxed{T(x) = T_1 + \left[T_2 - T_1\right]\frac{x}{L} + \frac{P(0)}{km^2}\left[(1 - \exp^{-mx}) - \frac{x}{L}(1 - \exp^{-mL})\right]}$$

$T(0) = T_1 \qquad T(L) = T_1 + T_2 - T_1 = T_2$ ok ...

$1 - mx \qquad \cancel{1} - 1 + mx - \frac{x}{L}(1 - \exp^{-mL})$



à priori, $\neq 0$ ... par $\neq$

b) $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \underbrace{\dfrac{T_2 - T_1}{L}}_{\leqslant 0} + \dfrac{P(0)}{km^2}\left[\underbrace{+m \exp^{-mx}}_{\text{de } m \text{ à } 0} - \dfrac{1}{L}(1 - \exp(-mL)) \right]$

$= \dfrac{T_2 - T_1}{L} + \dfrac{P(0)}{km^2}\left[\dfrac{(mL)\exp^{-mx} + \exp^{-mL} - 1}{L} \right]$

on suppose $mL \gg 1$ ...

$T_2 \sim T_1 \Rightarrow$ avec de rez $\exp(-mx)(mL) - 1 \simeq 0$

$(mL) \gg 1$

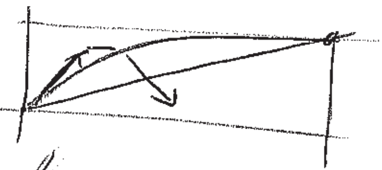
$\Rightarrow \exp(-mx) = \dfrac{1}{(mL)}$

$-mx = \ln\left(\dfrac{1}{mL}\right)$

$x = \dfrac{1}{m}\ln(mL)$

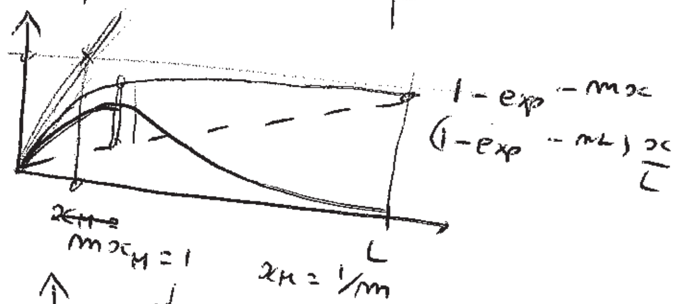
$x_m \simeq \dfrac{1}{m}\ln(mL)$

$\Rightarrow$

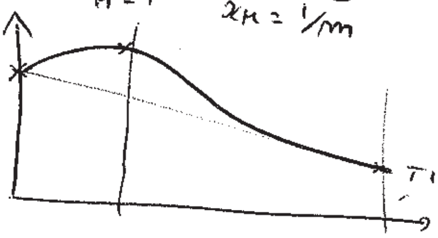


$\exp^{-mx_m} \simeq \dfrac{1}{mL}$

$\Rightarrow$



donc T_2



c) Puissance moyenne à l'extérieur ?

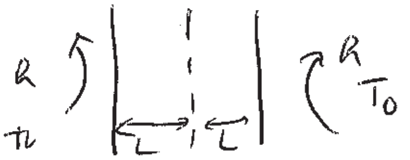
$$P_{TOT} = \int_0^L P(0)\exp^{-mx}\,dx = \frac{P(0)}{m}\left[1 - \exp^{-mL}\right]$$

Flux : $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}$: $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_L - \left(-k\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_0\right) = \dfrac{-P(0)}{m^2}\left[\dfrac{\cancel{mL}}{\cancel{L}}\exp^{-mL} - \dfrac{\cancel{m}}{\cancel{L}}\right]$

$= \dfrac{P(0)}{m}\left[1 - \exp^{-mL}\right]$

donc Puissance cédée = flux ~~[illegible]~~ sortant

$\boxed{2°}$



$P(x) = a[1+\beta(T(x)-T_0)]$

a) $k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{a}{k}[1+\beta(T(x)-T_0)]$

CL??? $x = L \Rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial x} = \varphi = h(T(x)-T_0) \sim h\Theta$

$x = -L \Rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial x} = \varphi = -h(T(x)-T(0))$

ou bien : $T(x)$ symétrique... $\frac{\partial T}{\partial x}$ antisym

b) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{a\beta}{k}}_{s}(T(x)-T_0) = -\frac{a}{k}$

$\Theta = T(x) - T_0 \Rightarrow \Theta'' + s\Theta = -\frac{a}{k}$

s>0 : $\Theta_p = -\frac{a}{ks}$ $\qquad r^2+s=0 \qquad r^2 = -s$

$\Rightarrow r = \pm i\sqrt{s}$

$\Theta_h = A\cos(\sqrt{s}x) + B\sin(\sqrt{s}x)$

Θ symétrique $\to B = 0$ $\qquad \frac{a}{sk} = \frac{1}{\beta}$

$\Theta(x) = A\cos(\sqrt{s}x) - \frac{a}{ks}$

$-k\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_L = +kA\sqrt{s}\sin(\sqrt{s}L) = h[A\cos(\sqrt{s}L) - a/ks]$

$kA\sqrt{s}\sin(\sqrt{s}L) = hA\cos(\sqrt{s}L) - \frac{ah}{ks}$

$\frac{a}{sk} = a\frac{\cancel{k}}{a\beta\cancel{k}} = \frac{1}{\beta}$

$\to \Theta(x) = A\cos(\sqrt{s}x) - 1/\beta$

$kA\sqrt{s}\sin(\sqrt{s}L) = hA\cos(\sqrt{s}L) - \frac{h}{\beta}$

$A[h\cos - k\sqrt{s}\sin] = h/\beta$

$\Rightarrow A = \frac{\cancel{h}1/\beta}{\cancel{h}\cos(\sqrt{s}L) - \frac{k}{h}\sin(\sqrt{s}L)\sqrt{s}}$

donc

$$\boxed{T(x) - T_0 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\cos(\sqrt{s}\,x)}{\cos(\sqrt{s}\,L) - \frac{k\sqrt{s}}{h}\sin(\sqrt{s}\,L)} - 1\right]}$$

<u>$s=0$:</u>

$$\theta'' = -\frac{a}{k} \qquad \theta' = -\frac{a}{k}x + A \qquad \theta(x) = -\frac{a}{2k}x^2 + Ax + B$$

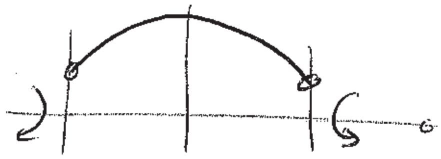
Symétrie : $A=0$ mais B $\qquad \theta(x) = -\frac{a}{2k}x^2 + B$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{a}{k}x$$

$$-k\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_L = aL = h\left(-\frac{a}{2k}L^2 + B\right)$$

$$aL = -\frac{ah}{2k}L^2 + Bh$$

$$B = \frac{aL + \frac{ah}{2k}L^2}{h} \quad \Rightarrow$$



<u>$s<0$:</u>

$$\theta'' + s\theta = -\frac{a}{k} \qquad r^2 + s = 0 \quad r^2 = -s > 0 \quad r = \pm\sqrt{-s}$$

$$\theta(x) = -\frac{a}{ks} + A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-s}\,x) + \underbrace{B}_{0 \text{ symétrie}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{-s}\,x)$$

$$= -\frac{1}{\beta} + A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-s}\,x)$$

$$-k\frac{\partial \theta}{\partial x} = -k\sqrt{-s}\,A\,\mathrm{sh}(\sqrt{-s}\,L) = h\left(-\frac{1}{\beta} + A\,\mathrm{ch}(\sqrt{-s}\,L)\right)$$

$$Ah\,\mathrm{ch}() + kA\sqrt{-s}\,\mathrm{sh}() = h/\beta$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1/\beta}{\mathrm{ch}() + k/h\sqrt{-s}\,\mathrm{sh}()}$$

donc

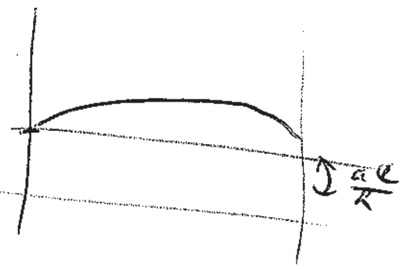
$$\boxed{T(x) - T_0 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{-s}\,x)}{\mathrm{ch}(\sqrt{-s}\,L) + k/h\sqrt{-s}\,\mathrm{sh}(\sqrt{-s}\,L)} - 1\right]}$$

c) $a=0 \qquad s=0 \qquad T(x) = T_0$ ou $\beta = 0$

$a \neq 0 \qquad \beta = 0 \Rightarrow s = 0$

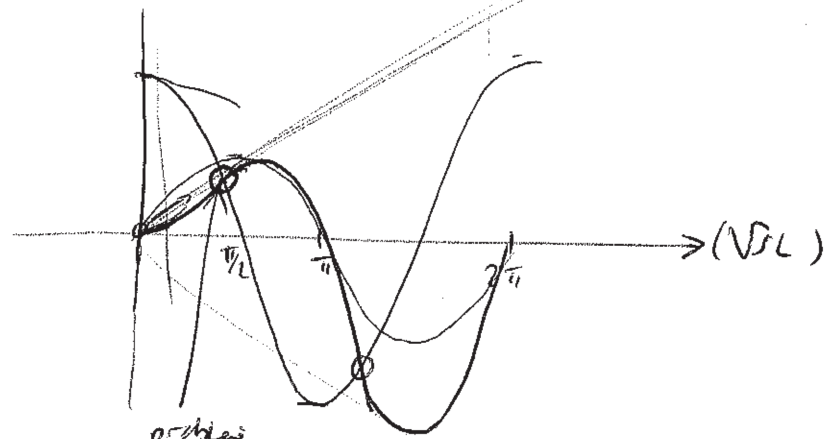
$$\theta(x) = \frac{aL}{h} + \frac{a}{2k}(L^2 - x^2)$$

$$T(x) - T_0 = \frac{aL}{h} + \frac{a}{2k}(L^2 - x^2)$$



$a\beta > 0$: → $\underline{s > 0}$:

problème : $\cos(\sqrt{s}L) = \frac{k\sqrt{s}}{h}\sin(\sqrt{s}L)$



problème...

$\cancel{1 - \frac{x^2}{2} = 1 - sL}$

$$\tan(\sqrt{s}L) = \frac{h}{k\sqrt{s}}$$

$$\sqrt{s}L = \mathrm{Arctan}\left(\frac{h}{k\sqrt{s}}\right)$$

$$\frac{h\sqrt{k}}{k\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{h}{\sqrt{k\alpha\beta}}$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{h}{k\sqrt{s}}\right) \qquad L\sqrt{s} = \pi/2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \sqrt{\frac{k}{a\beta}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{h}{\sqrt{ka\beta}}\right)}$$

Longueur critique ⇒ Explosion!!!

$T \nearrow +\infty$

d) $h = +\infty \Rightarrow T(x) - T_0 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\cos(\sqrt{s}x)}{\cos(\sqrt{s}L)} - 1\right]$

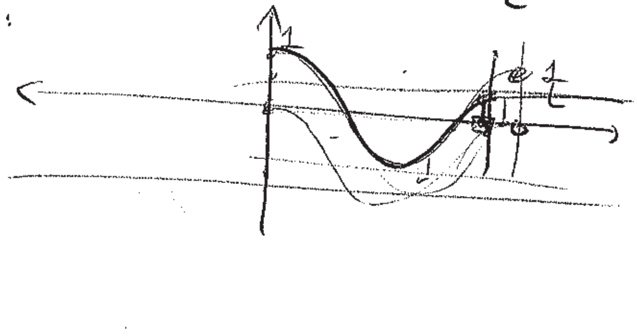
$x = L \Rightarrow T(x) = T_0$ ok...

donc :

$x = 0 \quad \frac{1}{\cos(\sqrt{s}L)} - 1$

Sful

Sinon :



Impossible car saisie → zone explosive

$L\sqrt{s} = \pi/2$ explose

impossible donc...

e)

$$\phi_{CD}|_L = -kS\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_L = \cancel{-kS\frac{\sqrt{s}}{\beta}}\sin(\sqrt{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\sqrt{s}}{\beta}\frac{\sin(\sqrt{s}x)}{\cos(\sqrt{s}L)}$$

$$\phi_{CD}|_L = \frac{kS}{\beta}\sqrt{\frac{a\beta}{k}}\tan(\sqrt{s}L)$$

$$\phi_{CD}|_{-L} = +kS\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{-\sqrt{s}}{\beta}\frac{\sin(-\sqrt{s}L)}{\cos} = \phi_{CD}|_L$$

$$\mathcal{P} = \int_{-L}^{+L} P\,dv = S\int_{-L}^{+L} P\,dx = S\int_{-L}^{L} a(1+\beta(T-T_0))\,dx$$

$$\beta(T-T_0) = \cancel{\#}\left[\frac{\cos\sqrt{s}x}{\cos\sqrt{s}L} - 1\right]$$

$$1+\beta(T-T_0) = \frac{\cos\sqrt{s}x}{\cos\sqrt{s}L}$$

$$\int_{-L}^{+L}\cos\sqrt{s}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\Big[\underbrace{+\sin(\sqrt{s}x)}_{+\sin(\sqrt{s}L)\times 2}\Big]_{-L}^{+L}$$

$$= \frac{+2\sin(\sqrt{s}L)}{\sqrt{s}}$$

donc $$\mathcal{P} = Sa\frac{-2\sin(\sqrt{s}L)}{\cos(\sqrt{s}L)}\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$= Sa(+2)(\tan\sqrt{s}L)\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\phi_{surface} = \frac{2kS}{\beta}\sqrt{\frac{a\beta}{k}}\tan(\sqrt{s}L) \qquad s = \frac{a\beta}{k}$$

et $$\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{a\beta}} \qquad Sa\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{a\beta}}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_{surface} &= 2S\sqrt{\frac{ka}{\beta}}\tan(\sqrt{s}L)\\ \phi_{volumique} &= 2S\sqrt{\frac{ka}{\beta}}\tan(\sqrt{s}L)\end{aligned}\right) = !!!$$

a) RI^2 = Puissance locale P_{TOT}

$$P_{TOT} = 0{,}06\ 10^{-3} \times 1000^2$$
$$= 60\ W.m^{-1}$$

$$\frac{P_{TOT}}{S} = \frac{60}{\pi R^2} = \frac{60}{\pi (0{,}01)^2} = 1{,}91.10^5\ W.m^{-3} = \mathcal{P}$$

b) $$k\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right] + \mathcal{P} = 0$$

$$\frac{d}{dr}() = -\frac{\mathcal{P}}{k} r$$

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$$T(r) = -\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B$$

singularité $\Rightarrow A = 0$ $\quad \underline{T(r) = -\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r^2}{4} + B}$

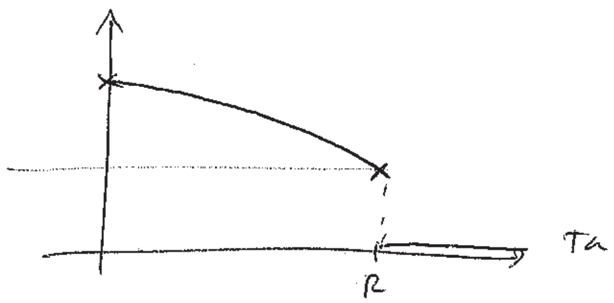
$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r}{2}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r} = \mathcal{P}\frac{r}{2} \qquad -k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = \mathcal{P}\frac{R}{2} = h(T(R) - Ta)$$

$$T(R) = B - \frac{\mathcal{P}}{k}\frac{R^2}{4} = \frac{\mathcal{P}R}{2h} + Ta$$

$$B = \frac{\mathcal{P}}{k}\frac{R^2}{4} + \frac{\mathcal{P}R}{2h} + Ta$$

donc $$T(r) = \frac{\mathcal{P}}{4k}\left[R^2 - r^2\right] + \frac{\mathcal{P}R}{2h} + Ta$$

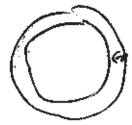


$$Ts = \frac{\mathcal{P}R}{2h} + Ta$$
$$= 30 + \frac{1{,}91.10^5}{2 \times 18} = \underline{\underline{83{,}06°C}}$$

c) $dT/dr = -\cancel{dT}\frac{\mathcal{P}}{k}\frac{r}{2}$ max à $r=0$

$$T(0) = Ts + \frac{\mathcal{P}R^2}{4k} = 83{,}06 + \frac{1{,}91\,10^5 (0{,}01)^2}{4 \times k}$$

(4°) $P(r) = P(0)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$



a) $\int P\,dv = \int_0^R P(0)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \underbrace{4\pi r^2 dr}$

$\int \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4\pi$

$= 4\pi P(0) \int_0^R \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r^2 dr$

$\left[\frac{r^3}{3} - \frac{1}{R^2}\frac{r^5}{5}\right] dr = 4\pi P(0)\left[\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{5}\right]$

$\frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$

$= \frac{8\pi}{15} P_0 R^3$

b) (1°) $k\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dT}{dr}\right]\right] + P(0)\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=0$

$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dT}{dr}\right] = -\frac{P(0)}{k}\left[r^2-\frac{r^4}{R^2}\right]$

$r<R$

$A \quad -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right] = r^2\frac{\partial T}{\partial r} \cancel{+A}$

$\frac{A}{r^2} \quad -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5R^2}\right] = \frac{\partial T}{\partial r}$

$\frac{A}{r} + B \quad -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r^2}{6}-\frac{r^4}{20R^2}\right] = T(r) \cancel{+A}$

$T(r) = -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r^2}{6}-\frac{r^4}{20R^2}\right] + \cancel{\frac{A}{r}} + B$

(2°) $r^2\frac{\partial T}{\partial r} = A'$

$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A'}{r^2}$

$T(r) = \frac{A'}{r}+B'$

Flux qui sort: $\frac{8\pi P(0)R^3}{15} = 4\pi R_0^2 H_e (T_2 - T_e)$

$\Rightarrow \boxed{T_2 = T_e + \frac{2}{15}\frac{P(0)R^3}{HR_0^2}}$

$T(r)_{ext} = T_2 + (T_1-T_2)\frac{1/r - 1/R_0}{1/R - 1/R_0}$

Plus court

$$\Leftrightarrow \quad -k\, 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \quad (T1-T2)\frac{-1/r^2}{1/R - 1/R_0}$$

$$= 4\pi k_0 (T_1 - T2) \frac{1}{1/R - 1/R_0}$$

donc $\quad 4\pi k_0 (T_1 - T2)\dfrac{1}{1/R - 1/R} = \dfrac{8\pi P(0)}{15} R^3$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = T2 + \frac{2}{15}\frac{P(0)}{k_0} R^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)}$$

$$\underset{\text{centre}}{T(r)} = -\frac{P(0)\,\cancel{R^4}}{k}\left[\frac{R^2}{6} - \frac{R^{\cancel{4}2}}{20\cancel{R^2}}\right] + B$$

$$-\frac{P(0)}{k}\left[\underset{2\times3}{\frac{1}{6}} - \underset{4\times5}{\frac{1}{20}}\right] R^2 + B = T_1$$

$$\frac{10-3}{60} = \frac{7}{60} \qquad B = T_1 + \frac{7}{60}\frac{P(0)R^2}{k}$$

$$T(r) = \underset{f(R_0)}{T_1} + \frac{P(0)R^2}{k}\left[\frac{7}{60} - \frac{1}{6}\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{20}\frac{r^4}{R^4}\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial R_0} = \frac{2}{15}\frac{P(0)}{k_0} R^3 \left(+\frac{1}{R_0^2}\right) - \frac{2}{15}\frac{P(0)R^3}{H}\frac{-2}{R_0^3}$$

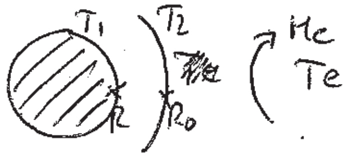
$$= \frac{2}{15}\frac{P(0)R^3}{R_0^2}\left[-\frac{2}{HR_0} + \frac{1}{k_0}\right]$$

$$\frac{dT_c}{dR_0} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{HR_0} + \frac{1}{k_0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_{0c} = \frac{2k_0}{H}}$$

$$\frac{d^2T_c}{dR_0^2} > 0 \rightarrow \text{minimum...}$$

CORRECTION TD n°2

Exercice n°4 :



combustible : $r < R$: $\quad P(r) = P(0)\left(1 - (r/R)^2\right)$

a) Flux thermique total à évacuer : $\iiint_V P(r)\,dV = \int_0^R P(r)\, 4\pi r^2 dr$

$$= 4\pi\, P(0) \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r^2 dr = 4\pi\, P(0) \left[\frac{r^3}{3} - \frac{1}{R^2}\frac{r^5}{5} \right] = \underline{\frac{8\pi}{15} P_0 R^3}$$

b) $$k\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{dT}{dr}\right]\right] + P(0)\left(1 - (r/R)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(r) = -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20R^2}\right] + \frac{A}{r} + B$$

pas de singularité en $r=0 \rightarrow A = 0$ $\qquad T(r) = -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20R^2}\right] + B$

dans le revêtement : $P = 0$

$$T(r) = \frac{A'}{r} + B'$$

en $r = R$: $\quad T(R) = T_1 = \frac{A'}{R} + B' = -\frac{P(0)}{k}\left[\frac{R^2}{6} - \frac{R^2}{20}\right] + B$

Flux qui sort : $\quad 4\pi R_0^2\, He\,(T_2 - Te) = \frac{8\pi}{15} P_0 R^3$

$$\Rightarrow \quad \underline{T_2 = Te + \frac{2}{15}\frac{P(0)\,R^3}{He\, R_0^2}}$$

dans le revêtement : $\quad T(r) = T_2 + (T_1 - T_2)\,\frac{1/r - 1/R_0}{1/R - 1/R_0}$

Flux total en R : $\quad -k_0 \frac{\partial T}{\partial r} 4\pi r^2 = 4\pi k_0 (T_1 - T_2)\frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}} = \frac{8\pi P_0}{15} R^3$

$$\Rightarrow \quad \underline{T_1 = T_2 + \frac{2}{15}\frac{P_0}{k_0} R^3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)}$$

au centre : $\quad T(r=R) = T_1 = -\frac{P(0)}{k}\left(\frac{R^2}{6} - \frac{R^4}{20R^2}\right) + B \quad \Rightarrow$ donc B

$$\text{donc} \quad T(r) = \underbrace{T_1}_{\text{dépend de } R_0} + \frac{P(0)R^2}{k}\left[\frac{7}{60} - \frac{1}{6}\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{20}\frac{r^4}{R^4}\right]$$

c) Minimum de $T(0)$? $\quad \left.\frac{\partial T}{\partial R_0}\right|_{r=0} = 0 \iff \frac{\partial T_1}{\partial R_0} = 0$

$$\frac{\partial T_1}{\partial R_0} = 0 \iff \frac{\partial T_2}{\partial R_0} + \frac{2}{15}\frac{P_0}{k_0} R^3\left(+\frac{1}{R_0^2}\right) = 0 \iff \frac{2}{15}\frac{P_0 R^3}{He}\frac{(-2)}{R_0^3} + \frac{2}{15}\frac{P_0}{k_0} R^3\left(\frac{1}{R_0^2}\right) = 0$$

$$\iff \frac{1}{R_0^2}\left[\frac{1}{k_0} - \frac{2}{He\, R_0}\right] = 0 \iff \boxed{R_{0c} = \frac{2 k_0}{He}}$$

on peut vérifier que $\frac{d^2 T_1}{dR_0^2} > 0 \rightarrow$ Minimum de Température à $R_{0c} = 2k_0/He$