TD n°1 :
Conduction thermique monodimensionnelle en régime stationnaire

Partie A : Géométrie cylindrique

1°) Ecrire l'équation aux dérivées partielles régissant la propagation de la chaleur dans un tube cylindrique de longueur L et de rayons intérieur Ri et extérieur Re. Le milieu est supposé homogène, isotrope et de conductivité thermique k. Les températures Ti et Te des parois intérieure et extérieure sont imposées et le transfert de chaleur est supposé purement radial (L>>Ri et Re).
a) Calculer la répartition de température à l'intérieur du tube.
b) Déterminer l'expression du flux de chaleur.
c) En utilisant le concept de résistance thermique et le résultat précédent, calculer l'expression du flux de chaleur traversant une structure cylindrique formée de 3 couches A, B, C de rayons R1, R2, R3, R4, ceci en fonction de l'écart total de température T1-T4.

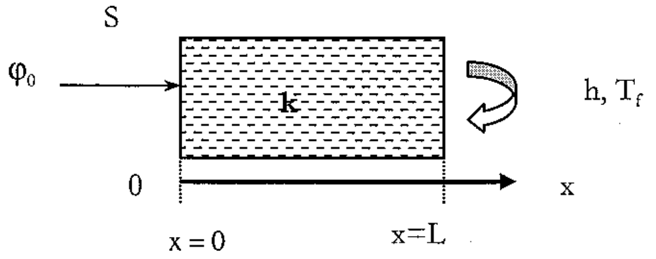
2°) Dans le calcul précédent, il n'a pas été tenu compte des échanges par convection forcée au niveau de la surface extérieure (coefficient hi) et de la surface extérieure (coefficient he) ; le fluide étant maintenu aux températures Tfi et Tfe au loin de ces deux surfaces.
a) Calculer le flux de chaleur.
b) Représenter le schéma analogique électrique équivalent.

3°) Une tasse en porcelaine (k=1,00W/m/°C) de rayon intérieur Ri=0,02 m contient du café à Tfi=80°C. La température ambiante extérieure est Tfe=20°C. Le coefficient de convection extérieure est he=25W/m²/°C. On admet la symétrie cylindrique sur la paroi latérale.
a) Déterminer l'épaisseur de la paroi de la tasse pour que la température Te de la surface extérieure soit au maximum égale à 40 °C, en supposant la convection intérieure infiniment grande pour que Tfi=Tpi.
b) La convection interne n'est plus infinie, on prend hi=100W/m²/°C. Ecrire le système à résoudre. Résolution numérique : calculer Re et Tpi.

4°) Epaisseur critique d'isolation
On installe une couche uniforme de matériau isolant (conductivité k) sur un corps cylindrique. La température intérieure est fixée à Ti et la surface extérieure est soumise à un environnement convectif à température Tinf et de coefficient h.
a) En utilisant le réseau des résistances thermiques équivalents, évaluer l'expression du transfert de chaleur.
b) Quelle est la valeur de Ro=Roc pour laquelle cette expression est maximale.
c) Discuter ce problème d'isolation en fonction des rayons Ro, Ri et Roc.

Partie B : Conduction stationnaire unidirectionnelle

Soit un mur d'épaisseur L, de surface S, en contact sur la face x = L avec un fluide à température T_f (le coefficient d'échange par convection est noté h). Ce mur est soumis sur la face x = 0 au rayonnement solaire et le vecteur densité de flux est noté $\vec{\varphi}_0 = \varphi_0 \vec{e}_x$. La conductivité thermique est notée k, et il n' y a pas de production de chaleur dans le mur.



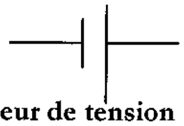
1°) Exprimer le problème mathématique et préciser l'écriture des deux conditions aux limites.
2°) Déterminer analytiquement la distribution de température dans le mur en fonction de φ_0, T_f, L, h et k.

Exprimer T(0) et T(L).

3°) Rappeler les bases de l'analogie électrique :

a) Quelle est la grandeur thermique analogue d'une tension, d'une courant et d'une résistance électrique.

b) Que représentent en terme de conditions aux limites sur la température les deux schémas électrique suivants :



Générateur de tension

Générateur de courant

4°) Dessiner le schéma électrique équivalent à notre problème en précisant les résistances électriques et les températures aux nœuds. En déduire trois expressions du flux de chaleur ϕ_0 traversant le mur.

5°) Faire apparaître dans l'expression T(x) de la question 2 le groupement $\beta = \frac{hL}{k}$. Donner les unités physiques de h, k et β. Discuter sur la valeur de la température T(L) lorsque $\beta \to 0$ et $\beta \to \infty$.

6°) Application numérique :

L = 10 cm, h = 10, k = 5, φ_0 =1000 et T_f =300K. Calculer β, T(0) et T(L).

Partie C : Géométrie sphérique

1°) Soit une sphère creuse de rayons extérieur et intérieur Re et Ri, dont on fixe les températures respectives à Te et Ti.

a) Déterminer la répartition de température dans la sphère.

b) Calculer le flux thermique et la résistance thermique équivalente.

c) En désignant par hi et he les coefficients d'échange par convection, calculer l'expression du flux thermique en fonction de Tfi et Tfe, les températures des fluides en contact avec la sphère à l'intérieur et à l'extérieur.

2°) On considère un réservoir sphérique de diamètre interne Di=2Ri contenant de l'oxygène liquide à une température T_0=90 K. La température de l'air ambiant est Ta=15 K. Soient hi le coefficient de transfert par convection entre l'oxygène et la surface interne du réservoir et he le coefficient de transfert par convection entre l'air ambiant et la paroi extérieure du réservoir. La paroi du réservoir, de diamètre externe De=2Re, est constituée d'un matériau isolant dont la conductivité k varie avec la température selon la loi :

$$k = f(T) = \frac{1}{a - bT}$$

où a et b sont des constantes positives, supposées connues, et **T est exprimée en °K.**

Pour l'étude du transfert de chaleur à travers la paroi annulaire isolante, on suppose que :

- les surfaces interne et externe de la paroi sont isothermes et maintenues respectivement aux températures Ti et Te qui demeurent constantes dans le temps.
- la conduction thermique dans la paroi est unidimensionnelle, en régime permanent et régit par la loi :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(k(T)r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

a) Déterminer la solution du problème T(r) en tenant compte des conditions aux limites précitées (Ti et Te).

b) En déduire l'expression de la puissance thermique totale $\dot{Q}_T$ traversant la paroi annulaire en fonction de Ti et Te ; en précisant le sens du flux thermique dans le cas où Te>Ti.

c) Si l'on s'interesse uniquement au cas asymptotique pour lequel :

$\varepsilon = \frac{bT}{a} << 1$ pour T telle que $Ti \leq T \leq Te$,

déterminer l'expression simplifiée de $\dot{Q}_T$ en fonction de Ti et Te.

En déduire la relation exprimant $\dot{Q}_T$ en fonction de T_0 et Ta.

$\boxed{\text{TD n°1 :}}$ Conduction

①

A GEOMETRIE CYLINDRIQUE

① ΔT ???
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T)+\mathcal{P}$$
$$= k\Delta T + \mathcal{P}$$

stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad \mathcal{P}=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 0$

cylindrique : $\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]=0$

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = cste = C_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

1-a : $T(R_i) = T_i = C_1 \ln R_i + C_2$

$T(R_e) = T_e = C_1 \ln R_e + C_2$

$\Rightarrow \quad T_e - T_i = C_1[\ln R_e - \ln R_i] = C_1 \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$

donc $\quad C_1 = (T_e - T_i)/\ln(R_e/R_i)$

et $\quad T(r) = \frac{(T_e-T_i)\ln\left[r\frac{\cancel{R_i}}{R_e}\right]}{\ln(R_e/R_i)}+C_2$

$T(R_e) = \frac{(T_e-T_i)\ln(R_e)}{\ln(R_e/R_i)}+C_2 = T_e$

$C_2 = T_e - (T_e-T_i)\frac{\ln(R_e)}{\ln(R_e/R_i)}$

donc $T(r) = (T_e-T_i)\ln\left(\cancel{r\frac{R_i}{R_e}}\right)+T_e-(T_e-T_i)\ln R_i$

$$= \frac{(T_e-T_i)\left[\ln\frac{r}{R_e}\right]}{\ln(R_e/R_i)}+T_e$$

$$\boxed{T(r) = [T_i - T_e]\,\frac{\ln(r/R_e)}{\ln(R_i/R_e)}+T_e}$$

vérif. $R = R_i \Rightarrow T_i - T_e + T_e = T_i$

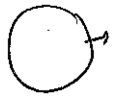
$R = R_e \Rightarrow T_e$ $\quad \underline{\underline{ok}}$

1-b : $\Phi = -k\vec{\nabla}T = -k\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e_r} \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_i-T_e}{r\ln(R_i/R_e)}$

donc $\boxed{\vec{q} = -k\frac{T_e-T_i}{r\ln(R_e/R_i)}\vec{e_r}}$ $\qquad T_e > T_i$

Flux calculé : $\oint\!\!\oint \vec{q}\cdot\vec{dS} = \int_0^L dy \int_0^{2\pi} \vec{q}\cdot\vec{e_r}\, r\, d\theta = L \times 2\pi \times [\vec{q}\cdot\vec{e_r}]_{R_i}$

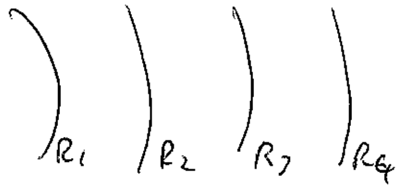
dans à R_i :



$L\,2\pi R_i \left[-k \frac{T_e - T_i}{R_i \ln(R_i/R_e)} \right]$

$$= -L\,2\pi k \frac{T_e - T_i}{\ln(R_i/R_e)} = -\frac{L\,2\pi k}{\ln(R_i/R_e)} (T_e - T_i)$$

Flux conservé :



$$\Phi = -\frac{L\,2\pi k}{\ln(R_2/R_1)}(T_2 - T_1) = -\frac{L\,2\pi k}{\ln(R_3/R_2)}(T_3 - T_2)$$
$$= \dots$$

$$\Rightarrow \quad (T_2 - T_1) = -\frac{\ln(R_2/R_1)}{L\,2\pi k}\Phi$$
$$(T_3 - T_2) = -\frac{\ln(R_3/R_2)}{L\,2\pi k}\Phi$$
$$(T_4 - T_3) = -\frac{\ln(\cancel{R_4}/R_3)}{L\,2\pi k}\Phi$$

$$\Rightarrow \quad T_4 - T_1 = -\sum \frac{\ln R_{i+1}/R_i}{2\pi L k}\Phi$$

donc : $$\Phi = -\frac{T_4 - T_1}{\sum \frac{\ln R_{i+1}/R_i}{2\pi Z k}}$$

Résistance thermique : $R_{th} = \cancel{\frac{\ln R_{i+1}/R_i}{2\pi L k}} \quad \frac{\cancel{2\pi L k}}{\cancel{\ln R_{i+1}}/R_i \cdot R_i} \frac{\ln R_{i+1}}{}$

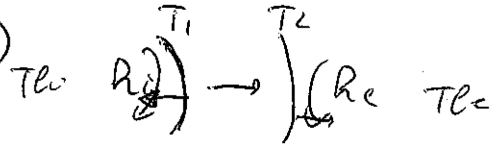
$U = T_4 - T_1$
$I = \Phi$ $\Rightarrow$ $U_{TOT} = \boxed{R_{TOT}}\,\Phi$

$$\sum \cancel{\frac{2\pi L k}{\ln R_{i+1}/R_i}} \frac{-\ln R_{i+1}/R_i}{L\,2\pi k}$$

Donc : $$T_4 - T_1 = \boxed{R_{th}}^{?}\,\Phi$$

$$\sum R_{th_i} = \sum \frac{-\ln R_{i+1}/R_i}{L\,2\pi k \dots}$$

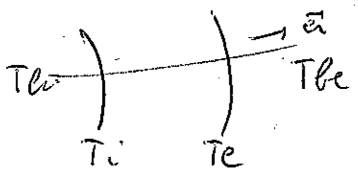
2)



$\Phi_1 = h_i (T_{\cancel{R}_1} - T_{fi})$
$\Phi_2 = h_e (T_2 - T_{fe})$

$$\Phi = -\frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{\ln R_2/R_1}{2\pi L k}\right)} = -h_i(T_1 - T_{fi})$$
$$= +h_e(T_2 - T_{fe})$$

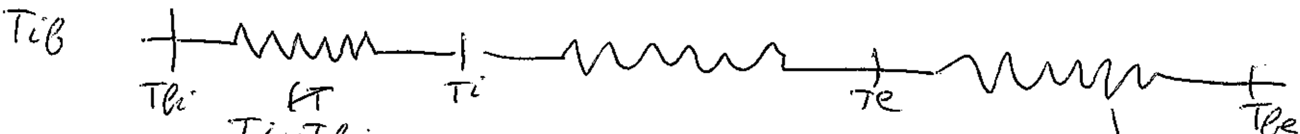
②



$$\vec{q_i} = -h_i(T_i - T_{\beta i})\vec{e_r}$$
$$\vec{q_e} = h_e(T_e - T_{\beta e})\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \Phi_i = -h_i(T_i - T_{\beta i})\,2\pi L R_i$$
$$\Phi_e = h_e(T_e - T_{\beta e})\,2\pi L R_e$$

$$\Phi_i : h_i 2\pi L R_i (T_{\beta i} - T_i) = -h_i 2\pi L R_i (T_i - T_{\beta i})$$
$$\Phi_e = -h_e 2\pi L R_e (T_{\beta e} - T_e)$$
$$\Phi_{\text{milieu}} = -\frac{1}{\frac{\ln R_e/R_i}{2\pi L k}} \times (T_e - T_i) = -\frac{2\pi L k}{\ln R_e/R_i}(T_e - T_i)$$



$$\frac{T_i - T_{\beta i}}{(-h_i 2\pi L R_i)^{-1}} \qquad \frac{T_e - T_i}{\left(-\cancel{\frac{\ln R_e/R_i}{2\pi L}}\ \frac{2\pi L k}{\ln(R_e/R_i)}\right)^{-1}} \qquad \frac{T_{\beta e} - T_e}{(-R_e 2\pi L R_e)^{-1}}$$

du $$\Phi = \frac{T_{\beta e} - T_{\beta i}}{\frac{-1}{2\pi R_i L h_i} + \frac{-1}{2\pi R_e L R_e} + \frac{-\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}}$$

3) $h_i = +\infty$

a- $$\Phi = \frac{T_{\beta i} - T_{\beta e}}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k} + \frac{1}{2\pi R_e L h_e}}$$

et aussi $$T_e - T_i = -\frac{\cancel{2\pi L k}\ \ln(R_e/R_i)}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}}\Phi = +\frac{T_{\beta e} - T_{\beta i}}{1 + \cancel{\frac{\ln R_e/R_i}{2\pi L k}}\frac{\cancel{2\pi L}k}{\ln(\,)}\frac{1}{\cancel{2\pi L}R_e h_e}}$$

$$T_e - T_{\beta i} = \frac{T_{\beta e} - T_{\beta i}}{1 + \frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)}}$$

$$T_e = T_{\beta i} + \frac{T_{\beta e} - T_{\beta i}}{1 + \frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)}} = 40°C$$

$$40 = 80 + \frac{20 - 80}{1 + \frac{k}{R_e h_e}} \Rightarrow 80 - 40 = \frac{80 - 20}{1 + k/(\,)}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)} = \frac{60}{40} = 1{,}5$$

$$\Rightarrow \frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)} = 0{,}5 \Rightarrow \ln(R_e/R_i) = \frac{k}{R_e h_e}\frac{1}{0{,}5}$$

donc $\ln \frac{Re}{Ri} = \frac{2k}{Re\,he} = \frac{2 \times 1}{25x}$ ou alors....

$$\boxed{Re \ln \frac{Re}{Ri} = \frac{0{,}5\,k}{he}}$$

1/50

$Re \simeq Ri$ 0,02

$= \frac{2}{0{,}25 \times 2} = 4$ $\ln \frac{Re}{Ri} = 4$ ... aargh....

$\Rightarrow$ | $Re =$

$Re \ln \frac{Re}{Ri} = \frac{2}{25}$

prendre $Re = 0{,}06655 \Rightarrow 6{,}65$ cm

3,6 cm hcas

2,627 ??? h_{fin}

b - $\Phi = \dfrac{Tli - Tle}{\frac{-1}{2\pi Ri hi L} - \frac{1}{2\pi Re he L} - \frac{\ln(Re/Ri)}{2\pi k L}}$

$Tli - Tle = \dfrac{-1/2\pi Ri hi L - \frac{\ln(Re/Ri)}{2\pi k L}}{\frac{-1}{2\pi Ri hi L} - \frac{1}{2\pi Re he L} - \frac{\ln}{2\pi k L}} (Tlo - Te)$

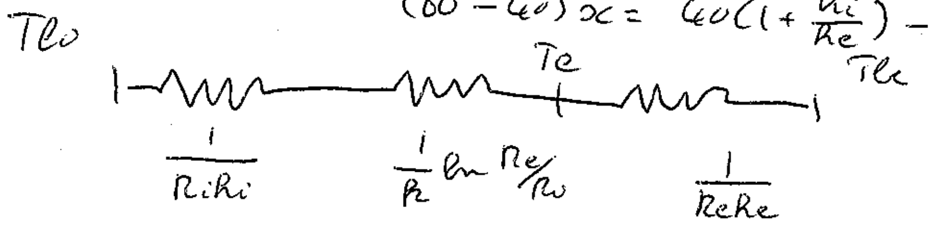
$= \dfrac{1 + \ln(Re/Ri)\frac{Ri hi}{k}}{1 + \frac{hi}{he} + \ln(Re/Ri)\frac{Ri hi}{k}} (Tli - Te)$

~~20 - 80 = Te~~ $(40 - 80) = \dfrac{1 + \overset{x}{\ln(Re/Ri)\frac{Ri hi}{k}}}{1 + \frac{hi}{he} + \ldots} (\underbrace{Tle}_{80} - \underbrace{20}_{40})$

$+40 = \dfrac{1 + x}{1 + \frac{hi}{he} + x} 60$

$(1 + \frac{hi}{he} + x) 40 = 60(1 + x)$

$(60 - 40)x = 40(1 + \frac{hi}{he}) - 60$



$Tle - Tli = \left(\frac{1}{Ri hi} + \frac{1}{Re he} + \frac{1}{k} \ln Re/Ri\right) \Phi$

$Te - Tli = \left(\frac{1}{k} \ln Re/Ri + \frac{1}{Ri hi}\right) \Phi$

$\dfrac{Te - Tli}{Tle - Tli} = \dfrac{\frac{1}{k}\ln(Re/Ri) + \frac{1}{Ri hi}}{\frac{1}{k}\ln(\ ) + \frac{1}{Ri hi} + \frac{1}{Re he}}$

$$\frac{T_{bi}-T_{bi}}{\frac{1}{h_i R_i}} = \frac{T_e - T_i}{\frac{1}{k}\ln R_e/R_i} = \frac{T_{be}-T_e}{\frac{1}{h_e R_e}}$$

$$\Delta T = \frac{1}{h_i R_i}\cancel{(T_{be}-T_{bi})}\Phi \qquad \Delta T = \frac{1}{\frac{1}{k}\ln R_e/R_i}\Phi \qquad \Delta T = \frac{1}{h_e R_e}\Phi$$

⇒

$$\Delta\,\cancel{T_{be}-T_{bi}=}\left[\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{h_eR_e}+\frac{1}{\frac{1}{k}\ln R_e/R_i}\right]\Phi = \Delta T$$

$$T_{be}-T_{bi} = \left[\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{h_eR_e}+\frac{1}{\frac{1}{k}\ln R_e/R_i}\right]\Phi$$

$$T_e - T_{bi} = \left[\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{\frac{1}{k}\ln(R_e/R_i)}\right]\Phi$$

$$\frac{T_{be}-T_{bi}}{T_e-T_i} = \frac{\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{h_eR_e}+\frac{1\ \ln(R_e/R_i)}{\cancel{k\ln(R_e/R_i)}}}{\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1\ \ln(R_e/R_i)}{\cancel{k\ln(R_e/R_i)}}}$$

$$\frac{20-80}{40-80} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} = \frac{\frac{h_eR_e}{h_iR_i}+\frac{h_eR_e}{k}\ln(R_e/R_i)+1}{\frac{h_eR_e}{h_iR_i}\cancel{+1}+\frac{R_eh_e}{k}\ln(R_e/R_i)}$$

$$\frac{3}{2}\left[4\frac{R_e}{R_i}\cancel{+1}+R_e\,25\ln(R_e/R_i)\right] = 4\frac{R_e}{R_i}+R_e\,25\ln(R_e/R_i)+1$$

$$R_e\,25\ln(R_e/R_i)\left(\frac{3}{2}-1\right)\cancel{4}\ \frac{1}{\cancel{2}2}4\frac{R_e}{R_i} = -\cancel{1}\,0{,}5$$

$$R_e\,25\ln(R_e/R_i)(0{,}5)+2\frac{R_e}{R_i} = -\cancel{1}\frac{1}{2}$$

b-

$$\Phi = \frac{T_{be}-T_{bi}}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}+\frac{1}{2\pi L R_eh_e}+\frac{1}{2\pi L R_ih_i}}$$

$$T_e - T_{bi} = \left(\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}+\frac{1}{2\pi L R_ih_i}\right]\Phi$$

$$\Rightarrow\quad T_e - T_{bi} = \frac{\ln(R_e/R_i)\frac{R_eh_e}{k}+\frac{R_eh_e}{R_ih_i}}{\ln(R_e/R_i)\frac{R_eh_e}{k}+\frac{R_eh_e}{R_ih_i}+1}(T_{be}-T_{bi})$$

$$\frac{T_e-T_{bi}}{T_{be}-T_{bi}} = \frac{\ln(R_e/R_i)\frac{R_eh_e}{k}+\frac{R_eh_e}{R_ih_i}}{\ln(R_e/R_i)\frac{R_eh_e}{k}+\frac{R_eh_e}{R_ih_i}+1} = \frac{40-80}{20-80} = \frac{2}{3}$$

don $\ln(Re/Ri)\,\frac{Re\,he}{k} + \underbrace{\frac{Re\,he}{k_i Ri}}_{\frac{Re}{Ri}\,\cancel{\frac{100}{25}}\,\frac{25}{100}} = 2$

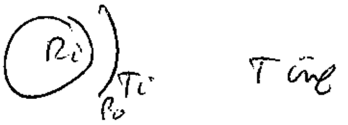
$\Rightarrow \ln(Re/Ri)\,Re\,25 + \frac{1}{4}\,Re/Ri = 2$

$\Rightarrow Re\,\ln(Re/Ri) + \frac{1/4}{25}(Re/Ri) = \frac{2}{25}$

$\underline{\underline{Re = 0{,}0538}}$ $\quad Ri = 0{,}02$

$\underline{\underline{et:}}$ $\quad Tpi\,???$ $\quad \underline{Tpi - Tbi} = \dfrac{Re\,he/k_i h_i}{\frac{Re\,h_e}{Ri\,h_i} + 1 + \ln(\ )\,\frac{Re\,he}{k}}$

4) Epaisseur critique



$\dot{q} = k\,2\pi\ell\,\dfrac{Ti - Te}{\ln Ro/Ri} = H\,2\pi\ell\,Ro\,(Te - T\infty)$

$\dot{q} = \dfrac{Ti - T\infty}{\frac{1}{2\pi k\ell}\ln Ro/Ri + \frac{1}{2\pi H\ell Ro}} = \dfrac{2\pi\ell\,(Ti - T\infty)}{\frac{1}{k}\ln\frac{Ro}{Ri} + \frac{1}{HRo}}$

$Ro \searrow_{Ri} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\ln \to 0\\ \frac{1}{Ro} \nearrow +\infty\end{matrix}\right)\ \frac{1}{Ro}\ \text{l'emp.}\ \ \dot{q} \searrow$

$Ro \nearrow\ -\ \left.\frac{1}{Ro} \nearrow\right)\ \dot{q} \searrow$

$\dfrac{d\dot{q}}{dRo} = 0 \rightarrow = \dfrac{2\pi\ell(Ti - T\infty)}{(\ )^2}\left(\frac{1}{k}\frac{1}{Ro} - \frac{1}{HRo^2}\right)$

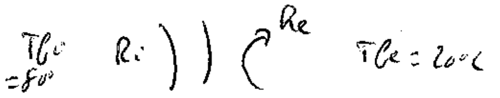
$$\boxed{Roc = \frac{k}{h}}$$

1er cas $Roc < Ri$: augmente [illegible]...

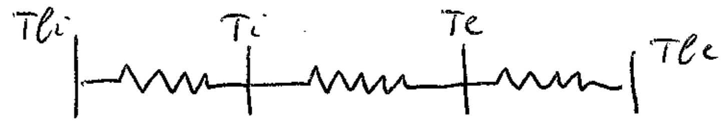
$Roc > Ri$

PARTIE A:

③



a)



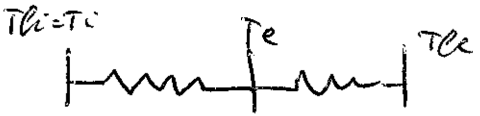
$$\frac{T_i - T_{fi}}{\frac{+1}{2\pi R_i L h_i}} \qquad \frac{T_e - T_i}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}} \qquad (-Q) = \frac{\Delta T}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}}$$

$R_i = +\infty$

$\Rightarrow T_i = T_{fi}$ Forcement

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi R_i L h_i} \qquad \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k} \qquad \frac{1}{2\pi R_e L h_e}$$

$\Rightarrow$



$$\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k} \qquad \frac{1}{2\pi R_e h_e L}$$

$$T_e - T_{fi} = \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k} \cancel{(T_e - T_{fi})} (-Q)$$

$$T_{fe} - T_e = \frac{1}{2\pi R_e h_e L} (-Q)$$

$$T_{fe} - T_{fi} = \left[\frac{1}{2\pi R_e h_e L} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}\right] (-Q)$$

$$\Rightarrow \frac{T_e - T_{fi}}{T_{fe} - T_{fi}} = \frac{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}}{\frac{1}{2\pi R_e h_e L} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi L k}} = \frac{1}{\frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)} + 1}$$

$$(T_e - T_{fi})\left[1 + \frac{k}{R_e h_e \ln(R_e/R_i)}\right] = (T_{fe} - T_{fi})$$

$$\frac{k}{R_e h_e \ln(\;)} = \frac{T_{fe} - T_{fi}}{T_e - T_{fi}} - 1 = \frac{T_{fe} - T_{fi} - T_e + T_{fi}}{T_e - T_{fi}}$$

$$= \frac{T_{fe} - T_e}{T_e - T_{fi}}$$

$$\frac{h_e}{k} R_e \ln(\;) = \frac{T_e - T_{fi}}{T_{fe} - T_e} \Rightarrow R_e \ln(R_e/R_i) = \frac{k}{h_e} \frac{T_e - T_{fi}}{T_{fe} - T_e}$$

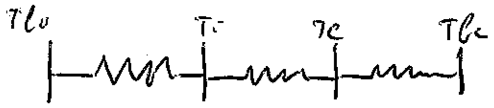
$$R_e \ln(R_e/R_i) = \frac{k}{h_e} \frac{T_e - T_{fi}}{T_{fe} - T_e} = \frac{1}{25} \frac{40 - 80}{20 - 40} = \frac{1}{25} \frac{40}{20} = \frac{2}{25}$$

résolution : $R_i = 0,02$

$$\Rightarrow \quad 0,0665 < R_e < 0,0666$$

6,65 cm !!! énorme

b)



$$\frac{T_e - T_{\ell i}}{T_{\ell e} - T_{\ell i}} = \frac{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi h_i L R_i}}{\frac{\ln(R_e/R_i)}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi h_i L R_i} + \frac{1}{2\pi h_e L R_e}}$$

$$= \frac{\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k} + 1}{\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k} + 1 + \frac{h_i R_i}{h_e R_e}} = \frac{T_e - T_{\ell i}}{T_{\ell e} - T_{\ell i}}$$

$$(T_e - T_{\ell i})\left(\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k} + 1 + \frac{h_i R_i}{h_e R_e}\right) = (T_{\ell e} - T_{\ell i})\left(\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k} + 1\right)$$

$$\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k}\left(T_e - \cancel{T_{\ell i}} \cancel{+ T_{\ell i}} - T_{\ell e}\right) + (T_e - \cancel{T_{\ell i}}) + (\cancel{T_{\ell i}} - T_{\ell e})$$
$$+ \frac{h_i R_i}{h_e R_e}(T_e - T_{\ell i}) = 0$$

$$\ln(\,)\frac{h_i R_i}{k}(T_e - T_{\ell e}) + (T_e - T_{\ell e}) + \frac{h_i R_i}{h_e R_e}(T_e - T_{\ell i}) = 0$$

$$\ln(R_e/R_i)\frac{h_i R_i}{k} + 1 + \frac{h_i R_i}{h_e R_e}\frac{T_e - T_{\ell i}}{T_e - T_{\ell e}} = 0$$

$$\ln(R_e/R_i)\frac{h_i R_i}{k} \cancel{+1} + \frac{h_i R_i}{h_e R_e}\frac{T_e - T_{\ell i}}{T_e - T_{\ell e}} = \cancel{0} - 1$$

$$\times \frac{k R_e}{R_i h_i}$$

$$R_e \ln(R_e/R_i) + \frac{k}{h_e}\frac{T_e - T_{\ell i}}{T_e - T_{\ell e}} = -\frac{R_e k}{R_i h_i}$$

$$\Rightarrow \quad R_e \ln(R_e/R_i) + \frac{k R_e}{h_i R_i} = \frac{k}{h_e}\frac{T_{\ell i} - T_e}{T_{\ell e} - T_{\ell e}}$$

$$R_e \ln(R_e/R_i) + \underbrace{\frac{k}{h_e}}_{\frac{1}{\cancel{25}100}}\frac{R_e}{R_i} = \frac{k}{h_e}\frac{T_{\ell i} - T_e}{T_e - T_{\ell e}} = \frac{1}{25}\frac{80-40}{40-20} = \frac{2}{25}$$

$$R_e \ln(R_e/R_i) + \frac{1}{100}\frac{R_e}{R_i} = \frac{2}{25}$$

~~$0,032 \leq R_e \leq 0,033$~~

$0,053 \leq R_e \leq 0,054$

PARTIE B

1°) $\underline{\Delta T = 0}$ $\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ldots$

$x=0 \qquad \varphi_0 \vec{e_x} = -k \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \vec{e_x}$

$$\Rightarrow \underline{\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -\varphi_0/k}$$

$x=L \qquad -k \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) = h(T(L)-T_f)$

$$\Rightarrow \underline{\dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{h}{k}(T(L)-T(f)) \text{ en } x=L}$$

2°) $T(x) = ax+b$

$$\Rightarrow \underline{T(x) = \dfrac{\varphi_0}{k}(L-x) + \dfrac{\varphi_0}{h} + T_f}$$

$T(0) = T_f + \dfrac{\varphi_0}{k}L + \dfrac{\varphi_0}{h} = T_f + \varphi_0 S\left(\dfrac{L}{kS} + \dfrac{1}{hS}\right)$

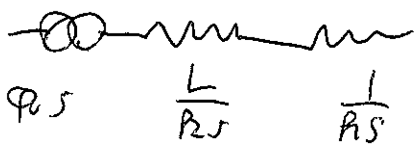
$T(L) = T_f + \dfrac{\varphi_0}{h}$

3°) Tension $\rightarrow T$

Courant $\rightarrow \varphi S$

$R \rightarrow \dfrac{L}{kS}$ et $\dfrac{1}{hS}$

4°)



$$\phi = \varphi_0 S = \dfrac{T(0)-T(L)}{L/kS} = \dfrac{T(L)-T_f}{1/hS}$$

5°) $\beta = \dfrac{L/kS}{1/hS} = \dfrac{T(0)-T(L)}{T(L)-T_f}$

$\beta \to 0 \Rightarrow T(0) = T(L)$

$\beta \to +\infty \Rightarrow T(L) = T_f$ $\qquad\qquad T(x) = \dfrac{\varphi_0}{h}\left[\beta\left(1-\dfrac{x}{L}\right)+1\right] + T_f$

6°) $\beta = \dfrac{10\times 0{,}1}{5} = 0{,}2 \qquad T(L) = 300 + \dfrac{1000}{10} = 400K$

$T(0) = 300 + 100(1+0{,}2) = \underline{\underline{420K}}$

PART C:

①

a)

$h \cdot \Delta T = 0$ cylindrique

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right] = 0$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} \qquad T(r) = -\frac{\alpha}{r} + b$$

$$T(r) = -\frac{a}{r} + b$$

$$T(Ri) = -\frac{a}{Ri} + b$$
$$T(Re) = -\frac{a}{Re} + b \quad \Rightarrow \quad Te - Ti = -\frac{a}{Re} + \frac{a}{Ri} = \frac{Re - Ri}{Ri Re}\, a$$

$$a = \frac{Ri Re}{Re - Ri}(Te - Ti)$$

$$Ti = -\frac{a}{Ri} + b = -\frac{Re(Te-Ti)}{Re-Ri} + b$$

$$b = \frac{Re \Delta T}{Re - Ri} + Ti$$

$$T(r) = Ti + \cancel{\frac{1}{Re}}\,(Te - Ti)\left[\frac{Re}{Re - Ri}\right]\left(1 - \frac{Ri}{r}\right)$$

$$T(r) = Ti + (Te - Ti)\frac{Re}{Re - Ri}\left[1 - \frac{Ri}{r}\right]$$

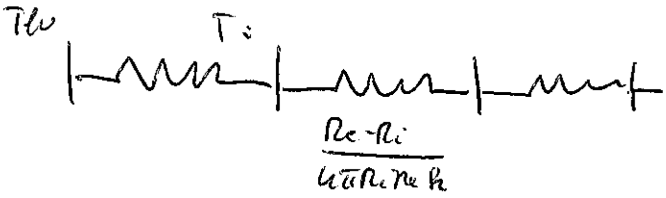
b) $$-k \frac{\partial T}{\partial r} = +^{h}\frac{a}{r^2} = \frac{Ri Re}{Re - Ri}(Te - Ti)\frac{k}{r^2}$$

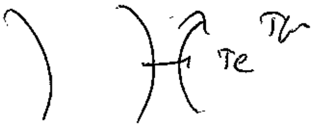
~~$2\pi r \ell$~~ ~~$\frac{4}{3}\pi r^3$~~ $$4\pi r^2\left(-k\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi Ri Re}{Re - Ri} k (Te - Ti)$$

donc $$\Rightarrow (-Q) = \underbrace{\frac{4\pi Ri Re}{Re - Ri}}_{\frac{1}{Rth}} k \underbrace{(Te - Ti)}$$

$$\boxed{Rth = \frac{Re - Ri}{4\pi Ri Re k}}$$

c)





$$\varphi \doteq h(T_{fe}-T_e)$$

$$4\pi r^2 \varphi = 4\pi R_i^2 (T_{fe}-T_e)$$

$$(-Q) = \underbrace{4\pi R_e^2}_{\frac{1}{R_t}}(T_{fe}-T_e)$$

$$R_t = \frac{1}{4\pi h R_e^2}$$

$$\frac{1}{4\pi h_i R_i^2} \qquad \frac{R_e-R_i}{4\pi R_i R_e k} \qquad \frac{1}{4\pi h_e R_e^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{l\,S}{\ell k} \qquad \frac{1}{h S}$$

$$\Rightarrow \quad T_{fe}-T_{fi} = (-Q)\left[\frac{1}{4\pi h_i R_i^2}+\frac{R_e-R_i}{4\pi R_i R_e k}+\frac{1}{4\pi h_e R_e^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(-Q) = \frac{T_{fe}-T_{fi}}{\frac{1}{4\pi h_i R_i^2}+\frac{1}{4\pi h_e R_e^2}+\frac{R_e-R_i}{4\pi R_i R_e k}}}$$

⑳ a)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[k(T)\,r^2\frac{dT}{dr}\right]=0$$

$$\rightarrow \quad k(T)\,r^2\frac{dT}{dr} = A$$

(*)
$$\underbrace{\frac{1}{a-bT}}\,\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

$$\left[\ln(a-bT)\right]' = (-b)\frac{1}{a-bT}\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a-bT}\frac{dT}{dr} = \left[\frac{-\ln(a-bT)}{b}\right]'$$

(1)
$$\rightarrow \quad -\frac{\ln(a-bT)}{b} = -\frac{A}{r}+B$$

$$\ln(a-bT) = A'/r + B'$$

dac:

$$a - bT = \exp^{A'/r + B'}$$

$$bT = a - \exp^{A'/r + B'}$$

$$T = \cancel{\frac{a}{b}} \frac{1}{b}\left(a - \exp^{A'/r + B'}\right)$$

$$\ln(a - bT) = A'/r + B'$$

$$\ln(a - bTe) = A'/Re + B'$$

$$\ln(a - bTi) = A'/Ri + B'$$

$$A'\left(\frac{1}{Re} - \frac{1}{Ri}\right) = \ln(a - bTe) - \ln(a - bTi)$$

$$= \ln \frac{a - bTe}{a - bTi}$$

$$A' = \frac{1}{\frac{1}{Re} - \frac{1}{Ri}} \ln \frac{a - bTe}{a - bTi}$$

$$= \frac{RiRe}{Ri - Re} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right)$$

$$\ln(a - bTe) = \frac{Ri}{Ri - Re} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right) + B'$$

$$B' = \ln(a - bTe) - \frac{Ri}{Ri - Re} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right)$$

$$\ln(a - bT) = \frac{Ri}{Ri - Re} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right)\left[\cancel{Re}\,\frac{Re}{r} - 1\right] + \ln(a - bTe)$$

$r = Re \Rightarrow$ $T = Te$ ok

$r = Ri \Rightarrow$ $\cancel{\frac{Re - Ri}{Ri \cdot Re}} (-1) \ln(\cancel{a - bTe}) + \boxed{\ln(a - bTi)}$

$\cancel{+ \ln(a - bTe)}$

$T = Ti$

b) $\varphi = -k \frac{\partial T}{\partial r}$ et $k(T) r^2 \frac{\partial T}{\partial r} =$

$$\left[\ln(a - bT)\right]' = \boxed{\frac{(+b)}{a - bT} - \frac{\partial T}{\partial r}} = \frac{Ri}{Ri - Re} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right)\left(-\frac{Re}{r^2}\right)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{a - bT} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{Ri}{Ri - Re} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a - bTe}{a - bTi}\right)\left(-\frac{Re}{r^2}\right)$$

(7°)

da $(-Q) = 4\pi r^2 (\varphi)$

$$= 4\pi \cancel{r^2} \frac{Ri}{Ri-Re} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right)\left(\frac{Re}{\cancel{r^2}}\right)$$

$$(-Q) = \frac{4\pi RiRe}{Ri-Re} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right) = \frac{4\pi RiRe}{Re-Ri} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{a-bTi}{a-bTe}\right)$$

$Te > Ti$

$Te > Ti \Rightarrow \geq 0$

$(-Q) \geq 0 \rightarrow Q < 0$

ao!!!

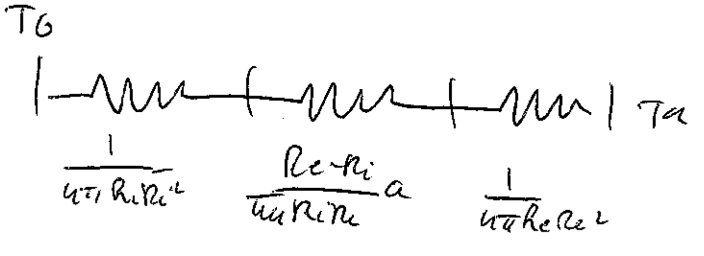
c) $\frac{bT}{a} \ll 1$ $\quad \frac{a-bTi}{a-bTe} = \frac{1-\frac{bTi}{a}}{1-\frac{bTe}{a}}$

$$\ln\left(1-\frac{bTi}{a}\right) - \ln\left(1-\frac{bTe}{a}\right)$$

$$= -\frac{bTi}{a} + \frac{bTe}{a} = \frac{b}{a}(Te-Ti)$$

$$(-\hat{Q}_T) = \frac{4\pi RiRe}{Re-Ri} \frac{1}{b} \frac{b}{a} (Te-Ti) = \underbrace{\boxed{\frac{4\pi RiRe}{Re-Ri} \frac{1}{a}}}_{\frac{1}{Rth}} \underbrace{(Te-Ti)}_{\Delta T\ \text{ov}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{Rth = \frac{(Re-Ri)\,a}{4\pi RiRe}}_{\text{en relación}} \quad \left(\frac{1}{R}\right)$$



$$(Ta-To) = \left(\frac{1}{4\pi Ri\,Ri^2} + \frac{Re-Ri}{ReRi\,4\pi}a + \frac{1}{4\pi ReRe^2}\right)(-Q)$$

$$\Rightarrow \boxed{(-Q) = \frac{Ta-To}{\frac{1}{4\pi RiRi^2} + \frac{1}{4\pi ReRe^2} + \frac{Re-Ri}{4\pi RiRe}a}}$$

PARTIE B

Flux de chaleur $\vec{\varphi} = - \vec{\nabla} T \, k$ || loi de Fourier

0

Bilan MMC : $$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \underset{\uparrow}{u} \, dv = \oiint \vec{q} \cdot d\vec{S} + \boxed{\iiint q_v \, d\tau}$$

source

énergie interne volumique

$$+ \boxed{\iiint_V \vec{\sigma} : \vec{d} \, d\tau}$$

0

$U = m c_p T \Rightarrow u = \underset{\rho}{\left(\frac{m}{V}\right)} c_p T$

$$\oiint \vec{q} \cdot d\vec{S} = \oiint q_i n_i \, dS = \iiint \boxed{q_{i,i}} \, dV$$

← $div(\vec{q})$

$\vec{q} = -$ $\quad q_i = - \overset{k}{T_{,i}}$

$q_{i,i} = - T_{,i,i} = - \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} k$

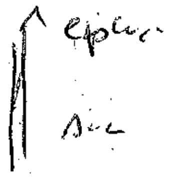
$= - \Delta T$

→ $$\frac{\partial}{\partial t} [\rho c_p T] = + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right]$$

$k = cste \Rightarrow k \boxed{\Delta T}$

$\vec{q} \cdot \vec{n} = - \varphi_0$ $\quad \left(- k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \underset{=}{(-1)} - \varphi_0$

pourquoi ?! $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = - \frac{\varphi_0}{k}}$$



$J s^{-1} = S \times \boxed{k} \frac{\Delta T}{L}$

$\downarrow$

W $\quad = m^2 \times k \times \frac{K}{m}$

$k = \boxed{J s^{-1}} m^{-1} K^{-1}$

$k \frac{\Delta T}{L} = \varphi$

$[k] = W m^{-1} K^{-1}$

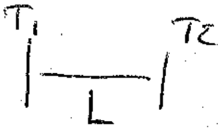
$\varphi = h(T - T_e)$

$\uparrow$ $W m^{-2}$ $\qquad$ $\uparrow$ K

$T - T_e = \boxed{\frac{1}{hS}}\varphi S$

Rth

$h = W m^{-2} K^{-1}$

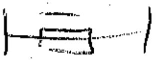


$\varphi = -k\frac{\Delta T}{L}$

$\uparrow$ cm

$= -k\frac{T_2 - T_1}{L} = -\frac{k}{L}(T_2 - T_1) = \frac{k}{LS}(T_1 - T_2)S$

$\downarrow$ Trans



$\Rightarrow$

$hLR = \frac{1}{Rth}$ $\qquad$ $Rth = \boxed{\frac{1}{h\,[illegible]\,S}}$ $\qquad$ α

$T_1 - T_2 = \boxed{\frac{L}{kS}}\varphi S$

$\Phi_{tot} = \boxed{W K^{-1}}\ \Delta T$

$\boxed{Rth = K W^{-1}}$

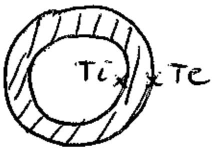
$\boxed{Rth_2 = \frac{L}{kS}}$

α $\qquad$ //

CORRECTION TD n°1

PARTIE C : SPHERIQUE

①



a) stationnaire sans source interne

$$k \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right] = 0$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = A \rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = A/r^2 \rightarrow T(r) = -A/r + B$$

profil general : $T(r) = \frac{A}{r} + B$

en $r = R_i$: $T(R_i) = \frac{A}{R_i} + B = T_i$ en $r = R_e$: $T(R_e) = \frac{A}{R_e} + B = T_e$

$$\Rightarrow \frac{A}{R_i} - \frac{A}{R_e} = T_i - T_e \quad \text{d'où} \quad A = (T_e - T_i)\frac{R_i R_e}{R_i - R_e}$$

$$\frac{A}{R_i} + B = T_i \Rightarrow B = T_i - \frac{(T_e - T_i)}{R_i - R_e}\frac{R_i R_e}{R_i} = T_i + \frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_e} R_e$$

donc $$\underline{T(r) = T_i + \frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_i} R_e\left[1 - R_i/r\right]}$$

b) Flux en r : flux à travers la surface de la sphère de rayon r

$$\vec{\varphi} = -k\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e_r} = -k\frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_i} R_e \frac{R_i}{r^2}$$

$$\iint_{Surface} \vec{\varphi}\cdot\vec{e_r} = \iint_{\theta,\varphi}\left(-k\frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_i} R_e \frac{R_i}{r^2}\vec{e_r}\right)\left(r^2 d\theta \sin\varphi\, d\varphi\right)\vec{e_r}$$

$$= -k\frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_i}\frac{R_e R_i}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2}\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi}_{4\pi}$$

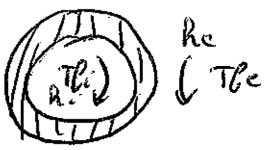
$$= -4\pi k (T_e - T_i)\frac{R_e R_i}{R_e - R_i}$$ indépendant de r !!!

donc :

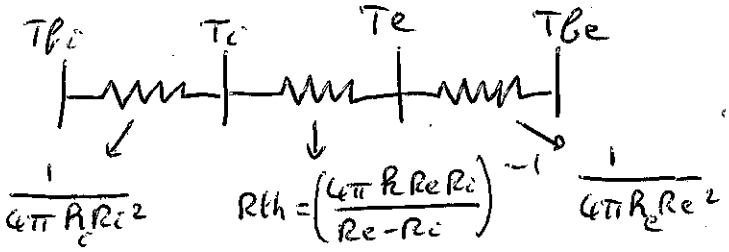
$$(-Q) = 4\pi k (T_e - T_i)\frac{R_e R_i}{R_e - R_i} = \frac{1}{R_{th}}(T_e - T_i)$$

$$\Rightarrow \underline{R_{th} = \left(\frac{4\pi k R_e R_i}{R_e - R_i}\right)^{-1}}$$

c)



$\Leftrightarrow$



échange : $\vec{\varphi_e} = h(T_e - T_{fe})\vec{e_r}$

sur la surface :

$$Q = \iint \vec{\varphi_e}\cdot\vec{dS} = 4\pi R_e^2 h_e (T_e - T_{fe})$$

$$(-Q) = 4\pi R_e^2 h_e (T_{fe} - T_e)$$

donc $(T_{fe} - T_{fi}) = (\sum R(h)) (-Q) = \left(\frac{1}{4\pi h_i R_i^2} + \frac{1}{4\pi h_e R_e^2} + \frac{R_e - R_i}{4\pi k R_e R_i} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{(-Q) = \frac{T_{fe} - T_{fi}}{\frac{1}{4\pi h_i R_i^2} + \frac{R_e - R_i}{4\pi k R_e R_e^2} + \frac{1}{4\pi h_e R_e^2}}}$$

② a) cette fois, $k(T)$

donc $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{a-bT} r^2 \frac{dT}{dr} \right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-bT} r^2 \frac{dT}{dr} = A \Rightarrow \frac{1}{a-bT} \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$$

or, $\frac{d}{dT}\left[\ln(a-bT) \right] = (-b) \frac{dT/dr}{a-bT}$

donc $\frac{d}{dT}\left[\ln(a-bT) \right] = (-b) \frac{A}{r^2}$

$$\longrightarrow \ln(a-bT) = \frac{A(+b)}{r} + B$$

d'où $a - bT = \exp^{B + \frac{Ab}{r}}$

solution generale : $a - bT(r) =$ ~~exp~~ $A' \exp^{B'/r}$

on garde : $\ln(a - bT(r)) = \frac{A}{r} + B$

en $r = R_i$: $\ln(a - bT_i) = A/R_i + B$ en $r = R_e$: $\ln(a - bT_e) = \frac{A}{R_e} + B$

$$\longrightarrow A\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) = \ln(a - bT_e) - \ln(a - bT_i) = \ln \frac{a - bT_e}{a - bT_i}$$

donc $A = \left(\frac{R_i - R_e}{R_i R_e} \right)^{-1} \ln\left(\frac{a - bT_e}{a - bT_i} \right)$

$$\ln(a - bT_i) = \frac{A}{R_i} + B \rightarrow B = \ln(a - bT_i) + \left(\frac{R_e - R_i}{\cancel{R_i} R_e} \right)^{-1} \ln \frac{a - bT_e}{a - bT_i}$$

d'où $\ln(a - bT(r)) = \ln(a - bT_i) + \cancel{\frac{R_e - R_i}{R_e R_i}} \frac{R_e \cancel{R_i}}{R_e - R_i} \ln\left(\frac{a - bT_e}{a - bT_i} \right) \left[1 - \frac{R_i}{r} \right]$

$$\boxed{\ln(a - bT(r)) = \ln(a - bT_i) + \frac{R_e}{R_e - R_i} \ln\left(\frac{a - bT_e}{a - bT_i} \right) \left[1 - \frac{R_i}{r} \right]}$$

b) $\vec{\varphi} = -k \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e_r}$ or, $\frac{d(\ln(a - bT))}{dr} = \frac{(-b)}{a - bT(r)} \frac{dT}{dr}$

donc $\frac{dT}{dr} = \frac{a - bT}{(-b)} \frac{d}{dr}(\ln(a - bT))$

or : $\frac{d \ln(a - bT)}{dr} = \frac{R_e}{R_e - R_i} \ln\left(\frac{a - bT_e}{a - bT_i} \right) \left[+ \frac{R_i}{r^2} \right]$

donc : $$\frac{dT}{dr} = \frac{a-bT}{(-b)} \ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right)\left(\frac{Ri}{r^2}\right)\frac{Re}{Re-Ri}$$

d'où $$-k\frac{dT}{dr} = \frac{-1}{a-bT}\frac{dT}{dr} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right)\frac{ReRi}{Re-Ri}\frac{1}{r^2}$$

intégré à la surface de la sphère de rayon r

$$\iint \vec{\Phi}\cdot\vec{dS} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right)\frac{ReRi}{Re-Ri}\frac{1}{\cancel{r^2}}4\pi \cancel{r^2}$$

d'où $$Q = \frac{4\pi}{b}\ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right)\frac{ReRi}{Re-Ri}$$

si $Te > Ti$ $\quad \frac{a-bTe}{a-bTi} < 1$ donc $\ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right) < 0$

d'où, un flux négatif : de l'extérieur vers l'intérieur...

c) $\frac{bT}{a} = \varepsilon \ll 1$

alors : $$\ln\left(\frac{a-bTe}{a-bTi}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{bTe}{a}}{1-\frac{bTi}{a}}\right) = \ln\left(1-\frac{bTe}{a}\right) - \ln\left(1-\frac{bTi}{a}\right)$$

$$\simeq -\frac{bTe}{a} + \frac{bTi}{a} = \frac{b}{a}(Ti-Te)$$

et donc $$Q = \frac{4\pi}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b}}{a}(Ti-Te)\frac{ReRi}{Re-Ri}$$

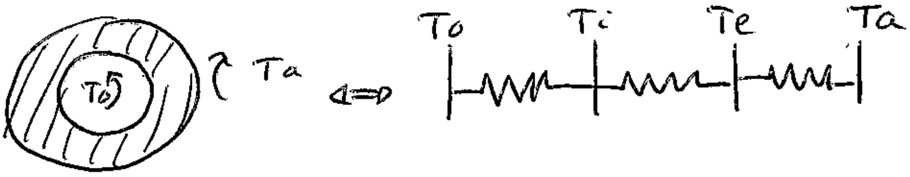
d'où $$(-Q) = \frac{4\pi}{a}\frac{ReRi}{Re-Ri}(Te-Ti)$$

donc $$Te-Ti = \underbrace{\frac{a(Re-Ri)}{4\pi ReRi}}_{Rth}(-Q)$$

comme $$k = \frac{1}{a-bT} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-\frac{bT}{a}}\right] = \frac{1}{a}(1+\varepsilon) \simeq 1/a$$

on retrouve : $$Rth \simeq \frac{Re-Ri}{4\pi k ReRi}$$

~~CORRECT~~



$$\Rightarrow (-Q) = \frac{1}{\frac{1}{4\pi hiRi^2} + \frac{Re-Ri}{4\pi k ReRi} + \frac{1}{4\pi heRe^2}}(Ta-To)$$