

### III- Effets de rotation (couche homogène)

- effet de la rotation important :  $Ro < 1$
- couche mince :  $Ro(H/L)^2 \ll 1$
- stratification négligeable (dynamique d'une fluide homogène)

$$Ro/Fr^2 \ll 1$$



$$\begin{aligned} Ro_T \frac{\partial u}{\partial t} + Ro \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{WL}{HU} w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= v - \frac{\partial p}{\partial x} \\ Ro_T \frac{\partial v}{\partial t} + Ro \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{WL}{HU} w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -u - \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

### III- Effets de rotation (couche homogène)

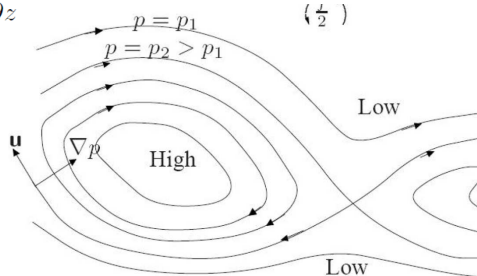
**Limite  $Ro = 0$  : géostrophie** et théorème de Taylor-Proudman

$$\begin{aligned} 0 &= fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{2D !!!}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Fonction de courant :

$$u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \text{ et } v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}.$$



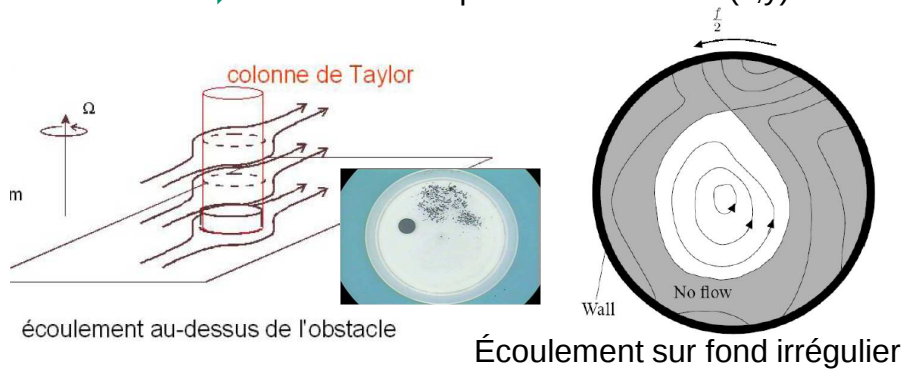
### III- Effets de rotation (couche homogène)

#### **Limite $Ro = 0$ : géostrophie** et théorème de Taylor-Proudman

Et les colonnes de Taylor ?

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w(x, y)$$

$\Rightarrow$  Écoulement à profondeur d'eau  $h(x, y)$  fixée !!!



Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

29

### III- Effets de rotation (couche homogène)

#### **Levée de la dégénéscence géostrophique ?**

-Effets visqueux : couches limites d'Ekman (surface horizontale) et de Stewartson (surface verticale)

-Effets temporels (dynamique « rapide » ou variété rapide) : ondes de surface modifiées par la rotation (ondes de Poincaré et de Kelvin, les «ondes d'inertie» de O.Thual) ou ondes internes d'inertie (milieu infini sans surface libre)

$$\omega^2 = f^2 + gH (k^2 + l^2)$$

-Effets inertiels pris en compte pour  $Ro$  petit, mais fini ( $Ro < 1$  mais  $Ro \neq 0$ )  $\rightarrow$  dynamique « lente » de la vorticité (variété lente), approximation quasi-géostrophique (pour le cas  $Ro \ll 1$  mais  $Ro \neq 0$ )

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

30

### III- Effets de rotation (couche homogène)

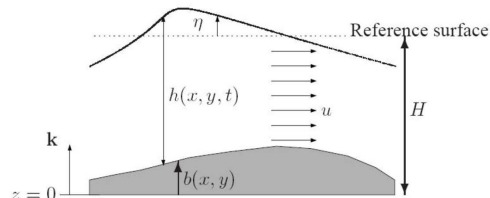
#### **Ro=O(1) ; Conservation de la VORTICITE POTENTIELLE**

$Ro = O(1)$ ; Equations de Saint-Venant (« shallow water ») avec rotation et lois de conservation

$$Ro(H/L)^2 \ll 1$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{Du}{Dt} &= fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Intégrée, remplacement w par  $\eta$  et b,  
devient :  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$



$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{f + \omega_z}{h} \right) = 0$$

### III- Effets de rotation (couche homogène)

#### **Ro<1 ; Applications / Illustrations :**

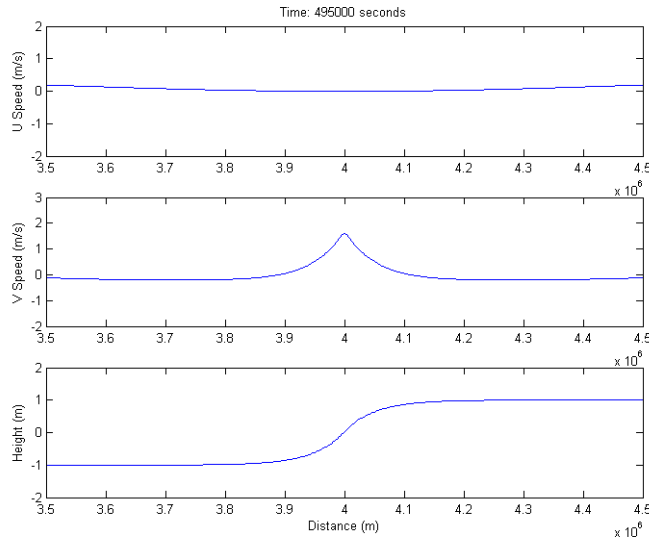
Exemple 1 : calcul de la condition de formation de colonnes de Taylor au-dessus d'un obstacle de hauteur h et de diamètre D, dans un fluide d'épaisseur H, pour une vitesse d'écoulement U et un paramètre de Coriolis f

Exemple 2 : calcul de la solution d'équilibre finale d'un problème de « lâcher de barrage » dans le cas d'un rotation

→ Rayon de déformation externe  $L_{pe} = (gH)^{1/2}/f$  (valeur atm/océan)

Exemple 3 : calcul de l'évolution spatio-temporelle complète d'un problème de « lâcher de barrage » dans le cas sans rotation (ondes de surface classiques) et dans le cas avec rotation (formation d'un jet et propagation des ondes de surface modifiées par la rotation) → **ajustement géostrophique (animation)**

### III- Effets de rotation (couche homogène)



stabilité du jet ? → instabilité « barotrope » (shear) avec  $L_{\max} = L_{De} = (gH)^{1/2}/f$  !!!

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

33

### III- Effets de rotation (couche homogène)

#### **Ro << 1 mais Ro ≠ 0 ; approximation Quasi-géostrophique (QG)**

**Principe** : on conserve les équations géostrophiques liant P, u et  $\eta$  (élévation de surface libre), mais on va à l'ordre suivant pour trouver une équation *dynamique*

**Résultat :**

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -f \vec{e}_z \times \vec{u} - g \vec{\nabla} \eta \\ \frac{DQ_{gg}}{Dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\text{green arrow}} \frac{D}{Dt} \left( -\Delta \psi + \beta y - \frac{1}{L_D^2} \psi \right) = 0 \\ &\text{ou bien} \\ &J \left( \psi, -\Delta \psi + \beta y - \frac{1}{L_D^2} \psi \right) = 0 \end{aligned}$$

$Q_{gg}$  = vorticité quasi-géostrophique qu'on retrouve par développement limité de la vorticité potentielle à l'ordre le plus bas !!!

Attention,  $\psi$  définie :  
 $\psi = (g/f_0)\eta$

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

34

### III- Effets de rotation (couche homogène)

#### Lien avec la turbulence ???

Sur plan  $\beta$  ou sur plan  $f$ , les grandes échelles vérifient cette équation :

$$J\left(\psi, -\Delta\psi + \beta y - \frac{1}{L_D^2}\psi\right) = 0$$

Pour des échelles plus petites que  $L_{De}$  ?  $L \ll L_{De}$  ?

→ Approximation du toit rigide donne la même chose, à savoir :

$$J(\psi, -\Delta\psi + \beta y) = 0$$

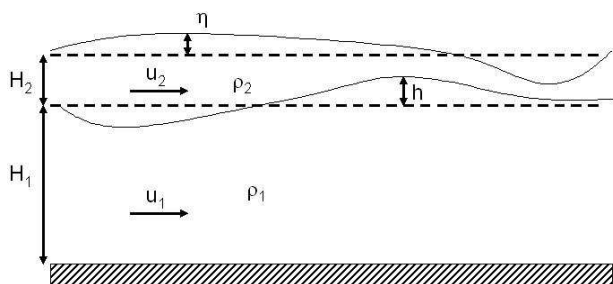
Sur plan  $f$  :  $J(\psi, -\Delta\psi) = 0$  !!! Purement 2D !!! Turbulence 2D !!!

Pour des échelles plus grandes ?  $L > L_{De}$  ?

→ l'échelle  $L_{De}$  représente une instabilité aux grands tourbillons et vient limiter « naturellement » la croissance des grandes structures (pour  $L \gg L_{De}$ , effet  $\beta$  vient restabiliser, avec des équations admettant des ondes de Rossby, d'où la formation de bandes (Jupiter) à l'échelle de Rhines basée sur  $\beta$  :

$$L_R = (U/\beta)^{1/2}$$

### III- Effets de stratification, approche à 2 couches



**hypothèses :**  
 -hydrostasie  
 -couche mince  
 (pour chaque couche)

**Résultat :**

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{u}_2}{Dt} &= -f\vec{e}_z \times \vec{u}_2 - g\vec{\nabla}\eta & 6 \text{ équations scalaires pour 6 inconnues scalaires !!!} \\ \frac{\partial(\eta - h)}{\partial t} &= -\text{div}((\eta - h + H_2)\vec{u}_2) \\ \frac{D\vec{u}_1}{Dt} &= -f\vec{e}_z \times \vec{u}_1 - g\frac{\rho_2}{\rho_1}\vec{\nabla}\eta - g\frac{\Delta\rho}{\rho_1}\vec{\nabla}h \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\text{div}((h + H_1)\vec{u}_1) \end{aligned}$$

→ 2 couches minces en rotation couplées par interface interne !!!

### III- Effets de stratification, approche à 2 couches

#### Décomposition mode barotrope / mode barocline

(illustration avec les ondes, sans rotation)

Linéarisation des équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - g' \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\eta - h)}{\partial t} + H_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

gravité réduite  
 $g' = g(\Delta\rho/\rho_0)$

Recherche en modes propres



$$\omega^4 - \omega^2 k^2 [g(H_1 + H_2) + g'H_1] + gg'H_1H_2k^4 = 0$$

2 familles de solutions

Ondes « barotropes »

$$\omega^2 = k^2 g (H_1 + H_2)$$

$$u_1 = u_2$$

$$h = \eta H_1 / (H_1 + H_2)$$

Ondes « baroclines »

$$\omega^2 = k^2 g' \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}$$

$$u_1 = -u_2 H_2 / H_1$$

$$\eta/h = -(g'/g)(H_1/(H_1 + H_2)) \approx 0$$

On retrouve cette famille facilement en imposant  $\eta=0$  (approximation du toit rigide)

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

37

### III- Effets de stratification, approche à 2 couches

#### Généralisation des résultats homogènes au bicouche

- **Dynamique rapide** : On a les relations de dispersion des ondes modifiées par la rotation. Pour les modes barotropes,  $H=H_1+H_2$ . Pour les modes baroclines,  $g \rightarrow g'$  la gravité réduite, et  $H \rightarrow H_e = H_1 H_2 / (H_1 + H_2)$  l'épaisseur équivalente. fréquences basses (illustration : seiches internes dans les lacs)

- **Dynamique lente** : Conservation de la vorticité potentielle dans chaque couche. Décomposition en modes barotropes et baroclines. Equilibre du « vent thermique ». Définition d'un rayon de déformation interne  $L_{Di} = (g'H_e)^{1/2}/f$  ( $\ll L_{De}$ ). (illustration : valeur océan, ajustement géostrophique barocline, approximation quasi-géostrophique pour un bicouche)

- Instabilité ? Instabilité « barocline » avec  $L_{max} = L_{Di} = f/(g'H_e)^{1/2}$ !

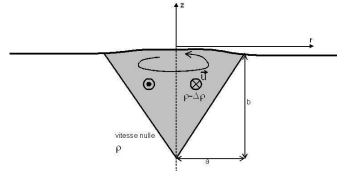
Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

38

### III- Effets de stratification, approche à 2 couches

#### 2 ou N couches ; Applications / Illustrations :

Exemple 1 : interface interne et élévation d'un tourbillon en bicouche de la forme suivante :



Exemple 2 : calcul des modes dans un tricouche (barotrope, variqueux et sinueux)

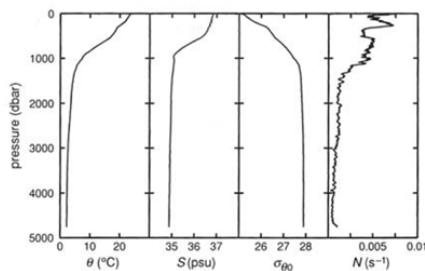


Exemple 3 : ajustement géostrophique du mode barocline dans un bicouche en configuration axisymétrique

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

39

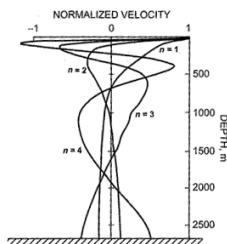
### IV- Effets de stratification, stratification continue



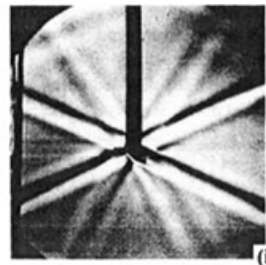
2 couches ? N couches ? Continu ?  
Ça dépend des échelles considérées...

Approche modale ( $k_h x - \omega t$ ) ?  
1 mode barotrope et une infinité de modes baroclines

Modes basse fréquence  
 $k_z H = O(1) \rightarrow N$  couches



Modes haute fréquence  
 $k_z H \gg 1 \rightarrow$  modèle continu



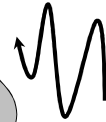
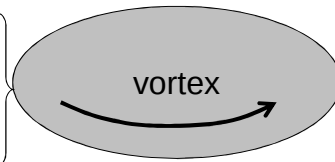
Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

40

## IV- Effets de stratification, stratification continue

### Modes lents

vortex polaire,  
Meddies,  
Méandres...  
« lent »  $T \gg 2\pi/f$



ondes  
d'inertie-gravité  
« rapide »  
 $2\pi/N < T < 2\pi/f$

-Limite  $Ro=0$  et  $Ro_T=0$

$$\begin{aligned} 0 &= fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 &= -fu - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{g}{\rho_o} \rho - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$



Équilibre  
du vent  
thermique

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

-Limite  $Ro, Ro_T \rightarrow 0$  mais fini ? Approximation quasi-géostrophique en stratifié continu

$$\mathbf{u}_H = -\mathbf{e}_z \times \nabla \Psi \quad \text{et} \quad \rho = \rho_o \frac{f}{g} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$



$$\frac{d}{dt} \left[ -\nabla^2 \Psi + f - (f/N)^2 \partial^2 \Psi / \partial z^2 \right] = 0$$

**-instabilité barocline ?** avec  $L_{\max} \approx NH/f$  où  $H$  est l'épaisseur

Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

41

## IV- Effets de stratification, stratification continue

### Vortex stratifié sans rotation

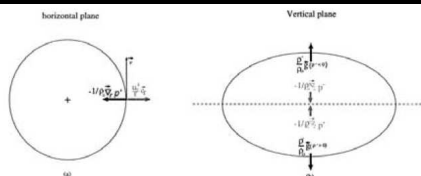


Fig. 3. Schematic view of the balanced state within a vortex structure. (a) Horizontal balance. (b) Vertical balance necessitating lighter fluid in the upper part of the vortex and heavier fluid in the lower part of the vortex.

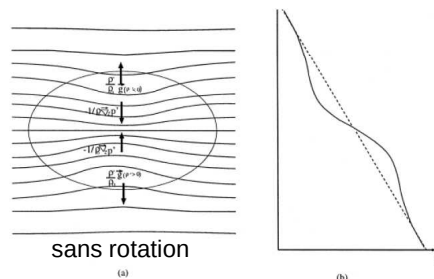


Fig. 5. (a) Deformation of the isopycnals in the vertical plane. The curvature adapts to allow hydrostatic balance. (b) Schematic diagram of the modification (intensification) of the density stratification in the core of the vortex (dashed line, background stratification).

$$\begin{cases} \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 & \text{(a) (H) Cyclostrophic balance} \\ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g}{\rho_o} \rho' = 0 & \text{(b) (V) Hydrostatic balance} \end{cases}$$

Low pressure in core is balanced by pinching of isopycnals

Measurement in wake of sphere:

**avec rotation :**

$$fu_\theta + \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad \text{Equilibre cyclo-géostrophique}$$



Equation du vent thermique

$$\left( f + \frac{2u_\theta}{r} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho'}{\partial r}$$

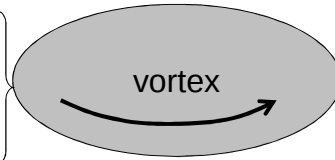
Turbulence Environnementale : 3- effets de rotation et stratification F. Moulin 2012-2013

42

## IV- Effets de stratification, stratification continue

### Modes rapides

vortex polaire,  
Meddies,  
Méandres...  
« lent »  $T \gg 2\pi/f$



ondes  
d'inertie-gravité  
« rapide »  
 $2\pi/N < T < 2\pi/f$

-Linéarisation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= fv - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{g}{\rho_o} \rho - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d\rho_o}{dz} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 (\Delta w)}{\partial t^2} + N^2 (\Delta_h w) + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k_h^2 N^2 + k_z^2 f^2}{k_h^2 + k_z^2} \quad |\omega| \in [f, N]$$

Fréquence  
N !!!

## IV- Effets de stratification, stratification continue

### Ondes internes

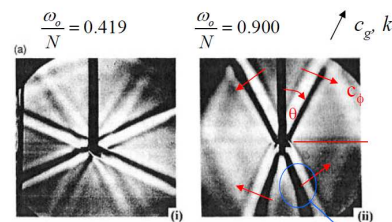
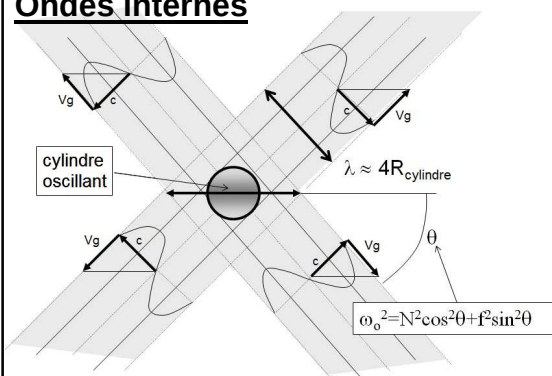
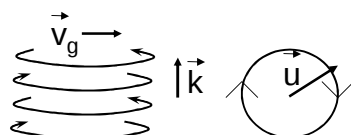
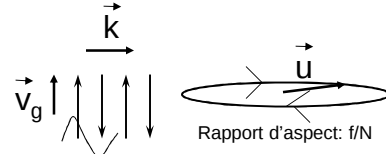


Figure 1.14. Internal-wave radiation. (a) A laboratory experiment showing internal waves generated in brine with a uniform density gradient ( $N$  constant) by a cylinder oscillating horizontally at frequency  $\sigma < N$ , which is seen 'end-on'. The ratio  $\sigma/N$  is 0.419 in (i) (where harmonic waves of frequency  $2\sigma$  can be faintly detected) and 0.900 in (ii). Waves have radiated from the cylinder, crossing the horizontal (isopycnal) surfaces of constant density, along four beams or rays at angles of  $\beta \approx \sin^{-1}(\sigma/N)$  to the horizontal and therefore at a greater angle in (ii) than in (i). These directions are those in which energy is transmitted by the waves from the cylinder, and are therefore the directions of the waves' group velocity,  $c_g$  (see part (b)). The black and white bands aligned in these directions correspond to the wave crests (continued opposite).

ondes 'inertielles' ( $\omega_o \approx f$ )

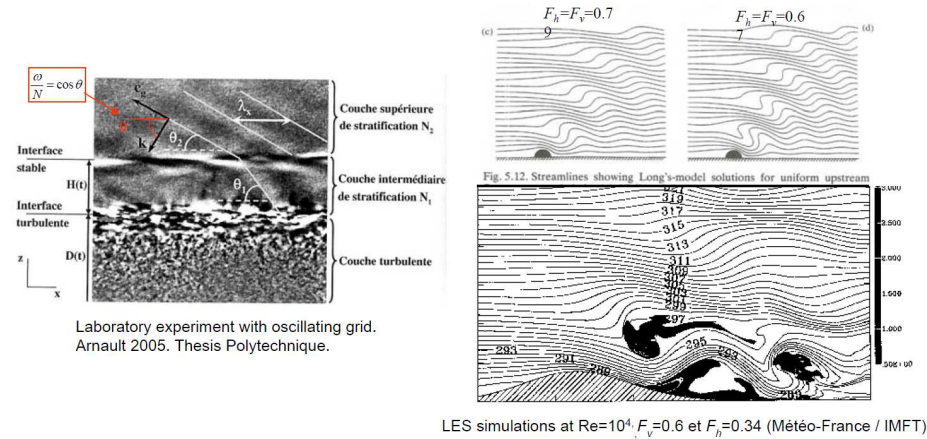


ondes 'gravitaires' ( $\omega_o \approx N$ )



#### IV- Effets de stratification, stratification continue

##### Génération, propagation et dissipation des ondes internes...



#### IV- Effets de stratification, stratification continue

