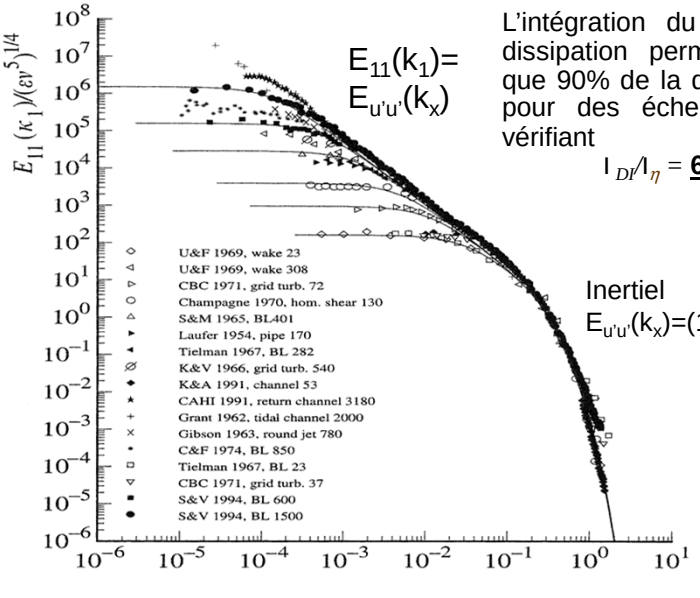
III- modèle THI; validation expérimentale : spectre universel



$E_{11}(k_1)= E_{u'u'}(k_x)$

L'intégration du spectre de la dissipation permet de montrer que 90% de la dissipation a lieu pour des échelles spatiales l vérifiant

l_{DI}/l_η = **60 > l / l $_\eta$ > 8**

Inertiel

$E_{u'u'}(k_x)=(18/55)\ C\varepsilon^{2/3}k_x^{-5/3}$

III- modèle THI; validation expérimentale : turbulence en déclin

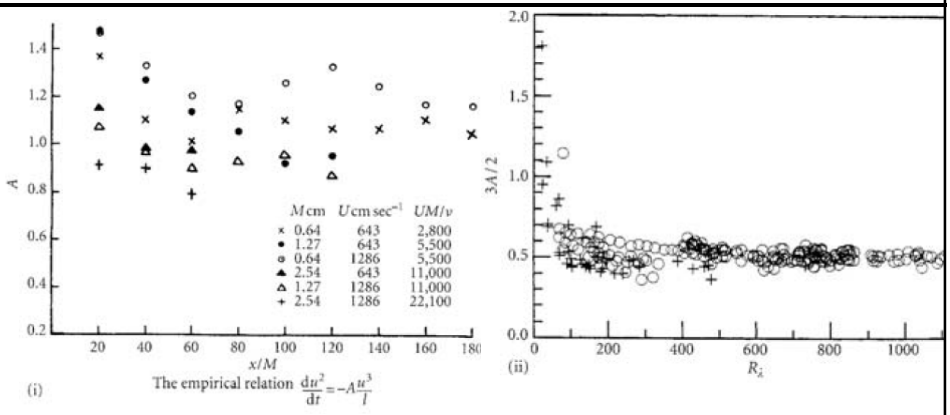


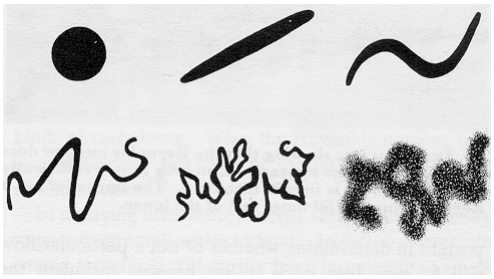
Figure 5.2 The rate of loss of energy in grid turbulence from (i) Batchelor (1953) and (ii) Pearson et al. (2004). In (ii) the circles are experiments, the crosses DNS, and R_λ the Reynolds number based on the Taylor scale. The parameter A is defined by the energy equation $du^2/dt = -Au^3/l$. For high R_λ, $A \sim 0.5$.

IV- transferts turbulents : phénoménologie

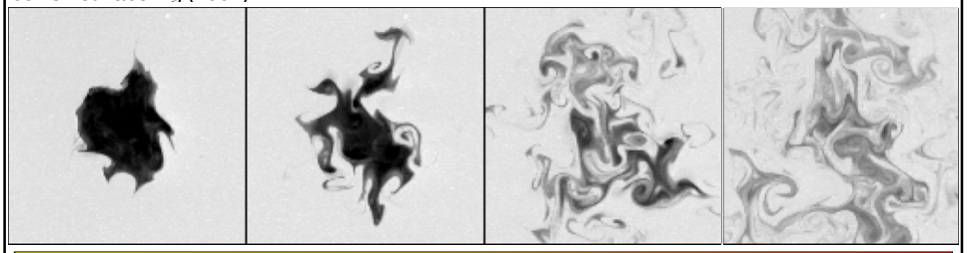
Un traceur passif (encre, température (?)) sous l'action de la turbulence

Diffusivité thermique a
Diffusivité massique D

$\rightarrow$Prandtl $P_r=\nu/a$
$\rightarrow$Schmidt $S_c=\nu/D$



Jullien et Tabeling (2001)



IV- transferts turbulents : phénoménologie

Stirring + diffusion = mixing

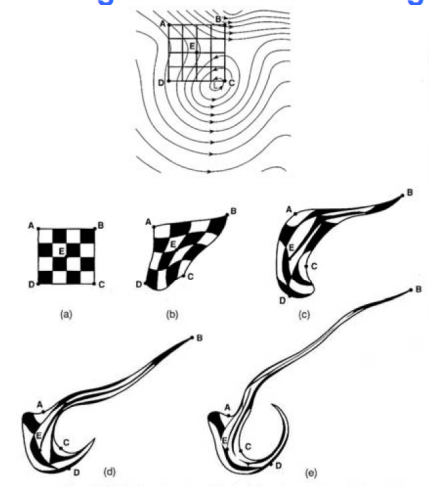
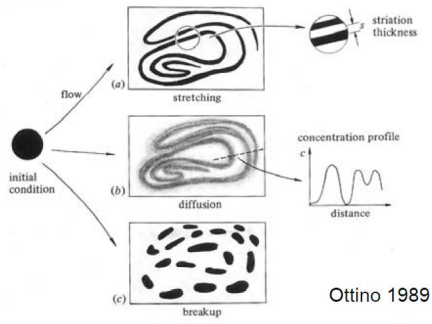


Figure 1.7. The distortion of a regular checkerboard pattern by an eddying motion. Successive stages are shown, (a)–(e), and in each the locations of points A–E carried with the flow are marked to indicate their dispersion by the eddying flow field. The sketch correctly conveys the notion of a spreading patch, but is slightly incorrect because area is not conserved: e.g., the black region on the left in (e) has an area greater than the corresponding area in (a). This is impossible in a flow that is strictly two-dimensional. (After Welander, 1955.)

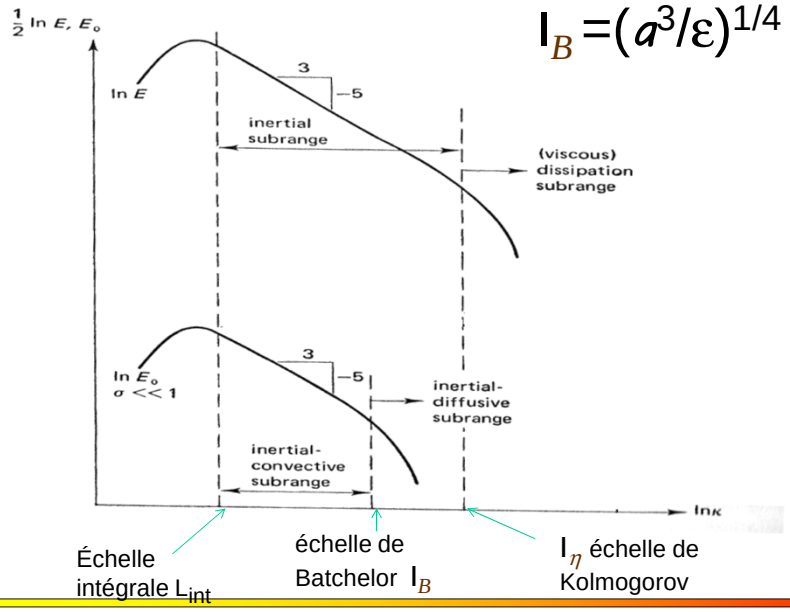


Ottino 1989

Figure 1.1.1. Basic processes occurring during mixing of fluids: (*a*) corresponds to the case of two similar fluids with negligible interfacial tension and negligible interdiffusion; an initially designated material region stretches and folds by the action of a flow; (*b*) corresponds to a blob diffusing in the fluid; in this case the boundaries become diffuse and the extent of the mixing is given by level curves of concentration (a profile normal to the striations is shown at the right); in (*c*) the blob breaks due to interfacial tension forces, producing smaller fragments which might in turn stretch and break producing smaller fragments. Case (*b*) is an excellent approximation to (*a*) if diffusion is small during the time of the stretching and folding. In (*a*) the blob is *passive*, in (*c*) the blob is *active*.

IV- transferts turbulents : spectres de température Pr << 1

$l_B = (a^3/\varepsilon)^{1/4}$



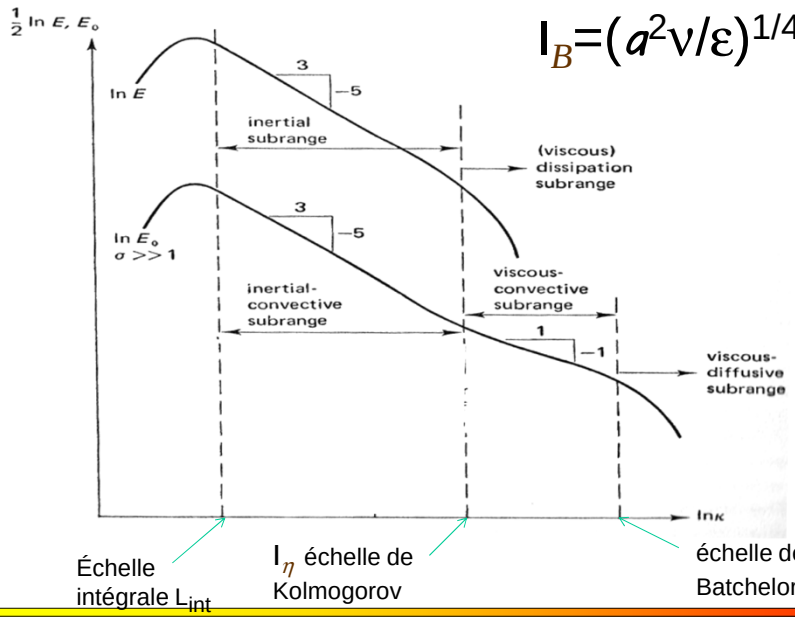
Échelle intégrale L_{int}

échelle de Batchelor l_B

l_η échelle de Kolmogorov

IV- transferts turbulents : spectres de température Pr >> 1

$l_B = (a^2\nu/\varepsilon)^{1/4}$



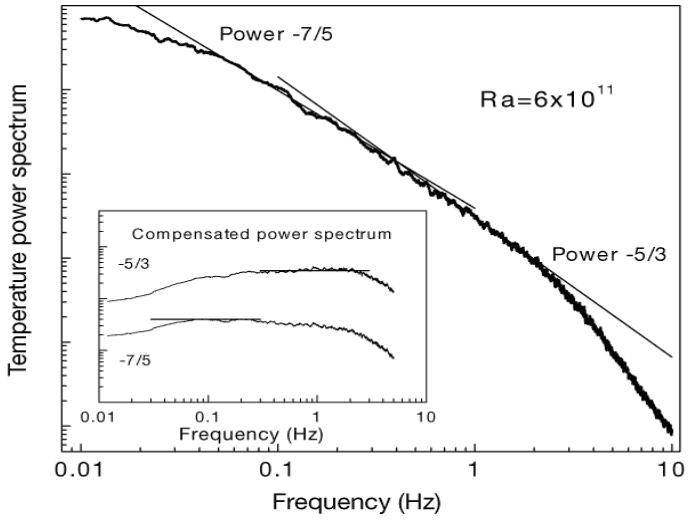
Échelle intégrale L_{int}

l_η échelle de Kolmogorov

échelle de Batchelor l_B

IV- transferts turbulents : validation expérimentale, spectre T°

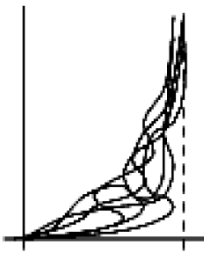
Quel Pr ????
Hélium cryogénique autour de 0.7



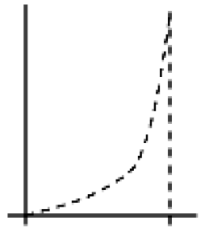
Turbulent convection at very high Rayleigh numbers
J. J. Niemela, L. Skrbek, K. R., Sreenivasanand R. J. Donnelly
Nature 404, 837-840(20 April 2000)

I- Décomposition de Reynolds ; origine et définition

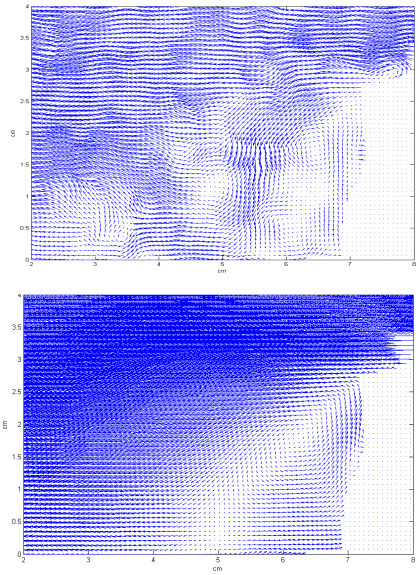
Pour pouvoir décrire les champs moyens



Profils instantanés u(z,t) verticaux de CLT(couche limite turbulente)



Profil moyenné en temps u(z)



I- Décomposition de Reynolds ; origine et définition

Problème de décomposition d'un champ instantané…

- Plusieurs définitions de moyenne possibles
  - D'ensemble, spatiale, temporelle, de phase
  - Moyenne temporelle
    → Bien adaptée à des écoulements statistiquement stationnaires

$$\overline{f}_T(\mathbf{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, t)\, dt$$

- On décompose les grandeurs instantanées en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'$$

- Propriétés des opérateurs de moyenne

$$\overline{\varphi'} = 0; \qquad \overline{\varphi\psi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi} + \overline{\varphi'\psi'}; \qquad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i}$$

I- Décomposition de Reynolds ; équations pour le champ moyen

- Equations de NS <u>incompressibles</u>
- On décompose vitesse et pression en une partie moyenne et une partie fluctuante

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{u}',$$

$$\overline{p} = p + p',$$

- On injecte dans les équations de NS
- Après moyenne, on aboutit aux équations de Reynolds

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}\right) \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$ contraintes visqueuses

$$\tau^R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$$ contraintes turbulentes

Équations R.A.N.S. Tenseur de Reynolds

II- Classification des modèles de Turbulence

Comment résoudre de façon pratique un problème de turbulence… (Classification de Chassaing p411)

1- Lois de régression et abaques

exemple : coeff. de perte de charge linéaire dans une conduite…

Formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

Hydrauliquement lisse

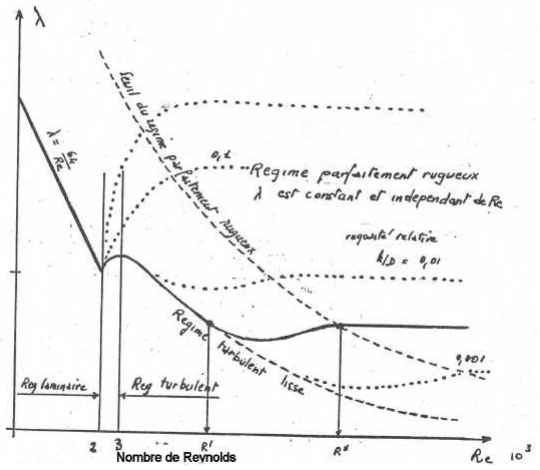
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8$$

Hydrauliquement rugueux

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(\frac{D}{2k}\right) + 1{,}735$$

Formule de Blasius (lisse et Re < 10^5)

$$\lambda = 0{,}316\ Re^{-0{,}25}$$



II- Classification des modèles de Turbulence

Comment résoudre de façon pratique un problème de turbulence… (Classification de Chassaing p411)

1- Lois de régression et abaques

2- Méthodes intégrales

Développées dans le cadre de la couche limite, avec approximation de Prandtl et intégration spatiale suivant 1 ou plusieurs variables

→ permettent de prédire l'évolution de la couche limite le long d'un profil

??? nécessitent d'imposer une forme particulière du profil (empirique, qui va induire des valeurs particulières du paramètre de forme H, etc…) et des corrélations entre différents paramètres intégraux…

équation intégrale de von Kármán-Polhausen

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial U}{\partial x} U\delta_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\delta_2 U^2)$$

F. Charru cours de M1 fluide en laminaire

version turbulente ? voir Cousteix p173

II- Classification des modèles de Turbulence

Comment résoudre de façon pratique un problème de turbulence… (Classification de Chassaing p411)

1- Lois de régression et abaques 2- Méthodes intégrales

3- Méthodes statistiques en 1 point

Utilisation des grandeurs moyennées en temps…. décomposition de Reynolds + fermeture….

3.1 – premier ordre (prédire seulement U, V, W)

- à 0 équation (algébrique) : tenseur de Reynolds dépend de U, V, W et d'une longueur de mélange géométrique
- à 1 équation (on rajoute une équation de transport pour k) : tenseur de Reynolds dépend aussi de k, énergie cinétique turbulente
- à 2 équations (par exemple k et ε) : tenseur de Reynolds dépend de k et ε.

3.2 – second ordre (prédire aussi u'w', u'v', …)

- à relations algébriques aux contraintes, connaissant k et ε (Rodi)
- à équations de transport des contraintes… il faut au moins une équation en plus, par exemple sur ε, pour fermer…

II- Classification des modèles de Turbulence

Comment résoudre de façon pratique un problème de turbulence… (Classification de Chassaing p411)

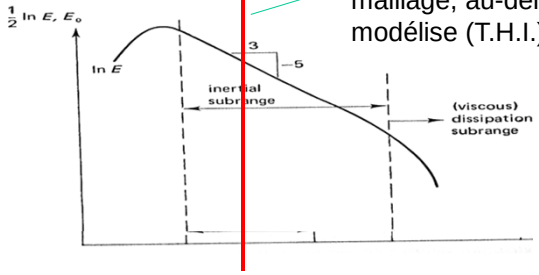
1- Lois de régression et abaques 2- Méthodes intégrales

3- Méthodes statistiques en 1 point

4- Méthodes spectrales encore le problème de fermeture…

5- Méthodes probabilistes

6- simulation des grandes échelles

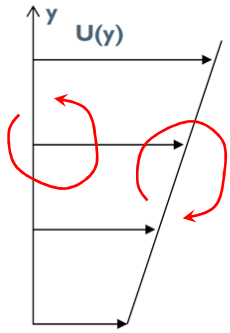


coupure spectrale par le maillage, au-delà, on modélise (T.H.I.)

7- simulation directe numérique coûteux….

III- modèles algébriques à 0 équation : viscosité turbulente…

- Hypothèse de la longueur de mélange de Prandtl
  - Analogie avec entre le transport turbulent et le transport moléculaire de quantité de mouvement



Molecular transport

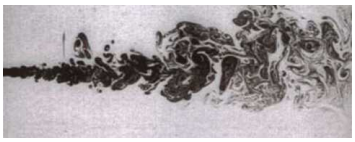
$$t_{xy} = \mu \frac{dU}{dy} \text{ , where } \mu = \frac{1}{2}\rho v_{th} l_{fmp}$$

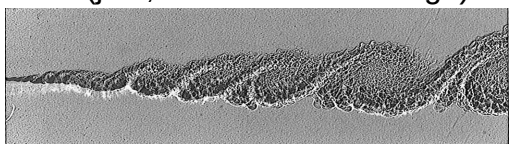
Turbulent transport

$$\tau_{xy} = \mu_t \frac{dU}{dy} \text{ , where } \mu_t = \frac{1}{2}\rho v_{mix} l_{mix}$$

III- modèles algébriques à 0 équation : Prandtl-Reichardt

• Ecoulements externes, « libres » (jets, couches de mélange)





Formule de Prandtl-Reichardt $\nu_t = \ell_m u_m = (1/Re_T)\Delta U(x)\delta(x)$

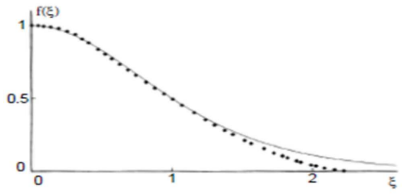
Solution autosimilaire pour le jet plan
- Équation de Prandtl en RANS
- Conservation de $\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \overline{u}^2 dy$ → $U_0(x)^2\delta(x)$ est conservé

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}$$

- dδ/dx=S élargissement constant (±δ à ½U_0)
- Solution $\underline{u}(x,y)=U_0(x)f(\xi)$ où $\xi=y/\delta(x)$

$$f(\xi) = \frac{1}{ch^2(\alpha\xi)}$$



Résultats expérimentaux :
Jet plan (cf TD), S(x)=0.10x → Re_T=31
Pope 2000, p135 et 366

III- modèles algébriques à 0 équation : couche limite turbulente

• Ecoulements internes, proche paroi (couche limite sur fond lisse)

Que choisir pour la viscosité turbulente ?
Modèle de **longueur de mélange** de Prandtl

$$\nu_t = \ell_m u_m = \ell_m^2 \left| \overline{\overline{grad}(\vec{u})} \right|$$

$$\ell_m \approx L_{\text{int},z}$$

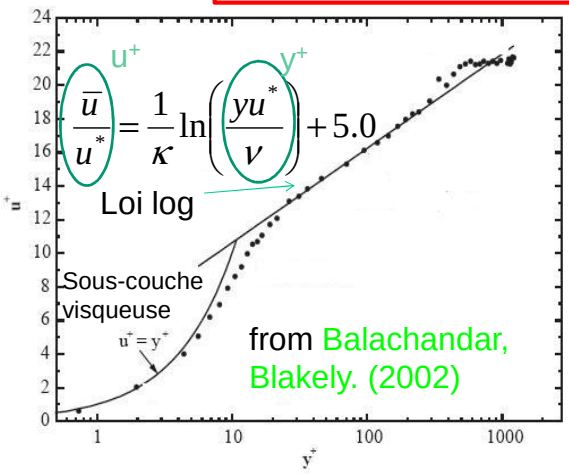
Couche limite sur fond lisse ?

$$\ell_m(y) = \kappa\, y$$

Vitesse de frottement ?

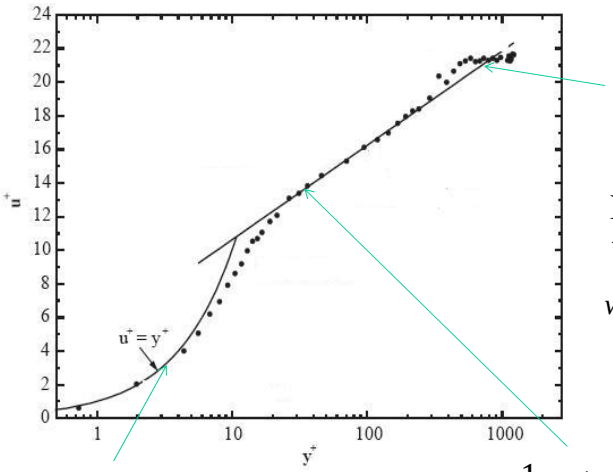
$$\rho u^{*2} = \tau_p$$

(Frottement pariétal)



III- modèles algébriques à 0 équation : couche limite turbulente

• Ecoulements internes, proche paroi (couche limite sur fond lisse)



loi déficitaire

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + 5.0 + \frac{2\Pi}{\kappa} w(y/\delta)$$

Π paramètre de Cole

w « wake function »

$$w\left(y/\delta\right) \approx \sin^2\left(\pi y/2\delta\right) \approx 3\left(y/\delta\right)^2 - 2\left(y/\delta\right)^3$$

$u^+ = y^+$ sous-couche visqueuse

$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + 5.0$ loi log

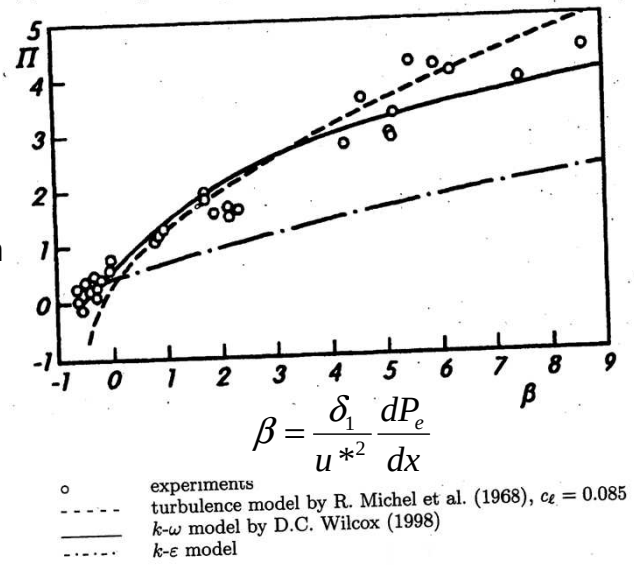
III- modèles algébriques à 0 équation : couche limite turbulente

• Ecoulements internes, proche paroi (couche limite sur fond lisse)

Π paramètre de Cole, dépend de l'écoulement externe…

Gradient de pression nul : $\Pi \approx 0.45$

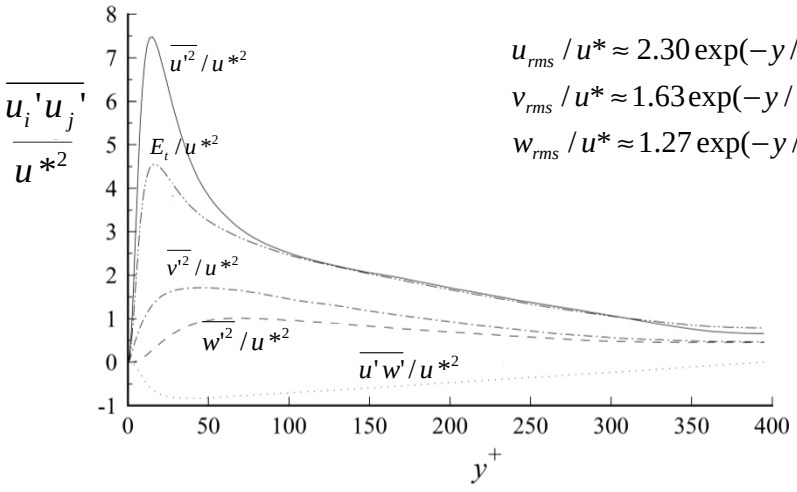
et sinon ?



III- modèles algébriques à 0 équation : couche limite turbulente

• Ecoulements internes, proche paroi (couche limite sur fond lisse)

Profils des rms pour les fluctuations turbulentes



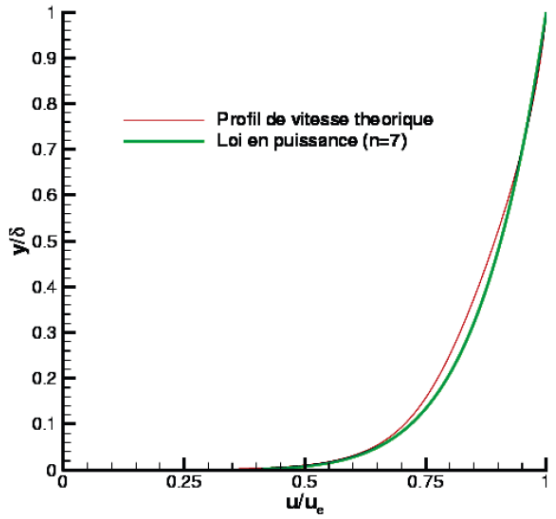
$$u_{rms}/u* \approx 2.30\exp(-y/\delta)$$
$$v_{rms}/u* \approx 1.63\exp(-y/\delta)$$
$$w_{rms}/u* \approx 1.27\exp(-y/\delta)$$

III- modèles algébriques à 0 équation : couche limite turbulente

• Ecoulements internes, proche paroi (couche limite sur fond lisse)

Encore plus simple : approximation classique en $y_+^{1/7}$ pour aéro

$$u^+ = 8.75\left(y^+\right)^{1/7}$$



III- modèles algébriques à 0 équation : théorie gradient…

Gradient transport theory or K-theory

Many kinds of closure models exist to **close** the mean turbulent flow equations (4)-(7), ie the [ ] terms. The most simple one goes back to **Boussinesq.** It is called the **gradient transport theory** or **K-theory** in the geophysical context.

For any variable ξ, the turbulent flux is modeled as

$$\overline{u_i'\xi'} = -K\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial x_i} \qquad (23)$$

Flux of ξ in direction i transported by u_i

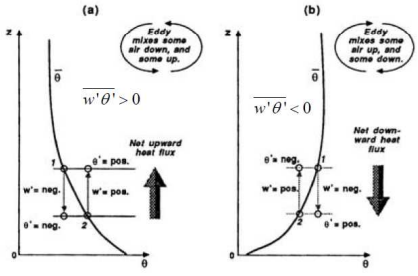


Fig. 2.12 Idealization of the small eddy mixing process, showing (a) net upward turbulent heat flux in a statically unstable environment, and (b) net downward turbulent heat flux in a stable environment.
Stull 88

Thus, gradient transport **parameterizations** for fluxes can be defined:

$$\overline{u_i'u_j'} = -K_m\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\overline{u_i'\theta'} = -K_H\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_i}$$

$$\overline{u_i'c'} = -K_C\frac{\partial\overline{C}}{\partial x_i} \qquad (24a\text{-}d)$$

$$\overline{u_i'q_T'} = -K_E\frac{\partial\overline{q}_T}{\partial x_i}$$

The $K_{m,H,C,E}$ are known as the **eddy viscosity**, or the **eddy diffusivity**, or the **eddy-transfer coefficient**, or the **turbulent transfer coefficient**, or the **gradient-transfer coefficient**.

K is a **property of the flow**, not the fluid, so no reason to expect that they are constant, neither in space nor for the different directions of the flux.

The turbulent fluxes are generally much larger than the molecular fluxes, which can thus be neglected.

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• Equation de transport de k, l'énergie cinétique turbulente (E_t)

avec $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$ et $s'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i} k\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\overline{u'_i\, p} - \overline{u'_i\, u'^2_j} + 2\nu\, \overline{u'_i\, s'_{ij}}\right)}_{T_i} \underbrace{-\overline{u'_i\, u'_j}\, S_{ij}}_{P} \underbrace{-2\nu\, \overline{s'^2_{ij}}}_{-\varepsilon}$$

T_i : diffusion ?

P : « shear » production

$-\varepsilon$: dissipation

• Modélisation ?

déjà : $-\overline{u'_i\, u'_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2\nu_t S_{ij}$

on rajoute : $\overline{u'_i\, p} - \overline{u'_i\, u'^2_j} \approx \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_i}$

et encore : $\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{\ell}$ et $\nu_t \approx k^{1/2}\ell$

⇒ Modèle algébrique à 1 équation (en k) en se donnant l !!!

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• Equation de transport de ε, la dissipation

Ça ne rentre pas dans le transparent….
mais sous forme simplifiée

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i}\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_i^{\varepsilon}\right) + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon + \nu\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2}$$

• Modélisation ?

$T_i^{\varepsilon} \approx \nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$

$P_\varepsilon \approx -\overline{u'_i\, u'_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\frac{\varepsilon}{k}$

$\varepsilon_\varepsilon \approx \frac{\varepsilon^2}{k}$

⇒ En supposant encore une fois $\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{\ell}$, et en combinant avec l'équation en k, on peut écrire : $\nu_t \approx k^{1/2}\ell \approx \frac{k^2}{\varepsilon}$

et aboutir à un modèle algébrique à deux équations de transport (k et ε), le fameux modèle « k –epsilon » !!!

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• Le modèle avec les valeurs « classiques » de ses paramètres

Equation R.A.N.S. pour $\overline{u_i}$

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \nu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

$$\nu_t = c_1\frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i}k) = -\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{c_2}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i}\varepsilon) = c_3\left(-\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\frac{\varepsilon}{k} - c_4\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{c_5}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)$$

c_1=0.09, c_2=1.0, c_3=1.44, c_4=1.92, c_5=1.3 (Spaziale, 1991)
Comment ? Par calage du modèle sur des écoulements de référence

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• Et les conditions limites ???

Il faut utiliser des « fonctions de paroi » pour avoir des conditions limites compatibles avec ce que l'on sait de la couche limite turbulente…

Si on est dans la sous-couche inertielle, au premier point du maillage on doit avoir :

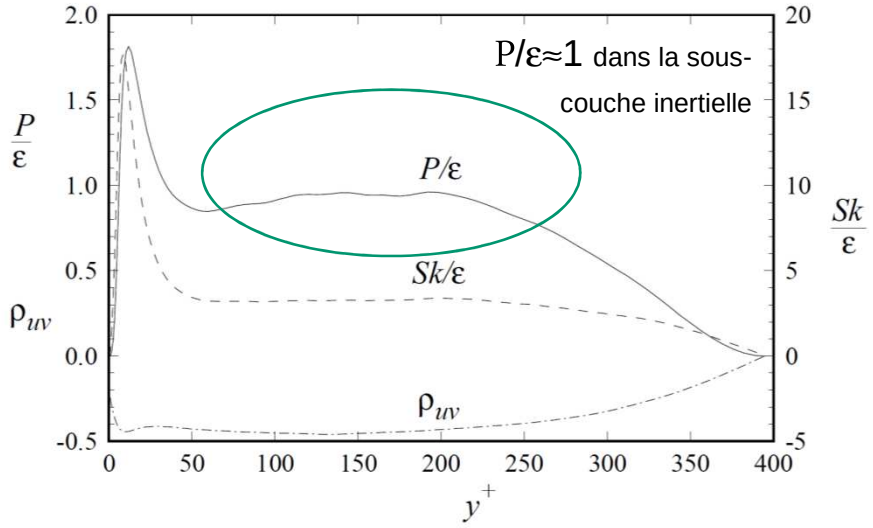
$$u_1^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y_1^+\right) + 5.0$$

➡ La valeur de vitesse u_1 nous donne u*

➡ Cette valeur impose k_1

➡ Et comme P=ε (transparent suivant), on estime ε avec $\varepsilon = u^{*2}/(\kappa y_1)$

Mais, en fonction de la position du premier point de maillage, on a des formulations plus subtiles…

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• retour : couche limite sur fond lisse