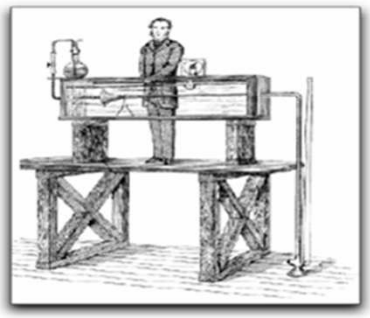
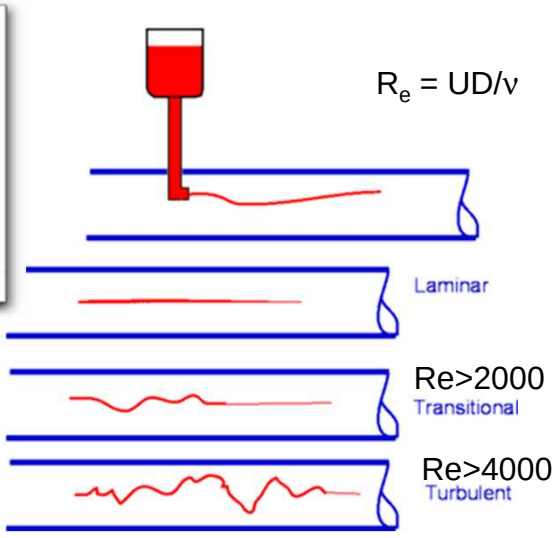
Turbulence Environnementale
M2R DET parcours MFE

Chapitre 2 : rappels de turbulence
« classique »

I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

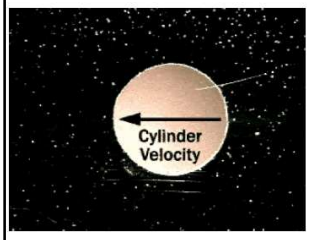
expérience de Osborne Reynolds (1842 -1912)

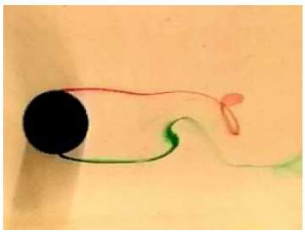




I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

écoulement derrière un cylindre / sillage $R_e = UD/\nu$

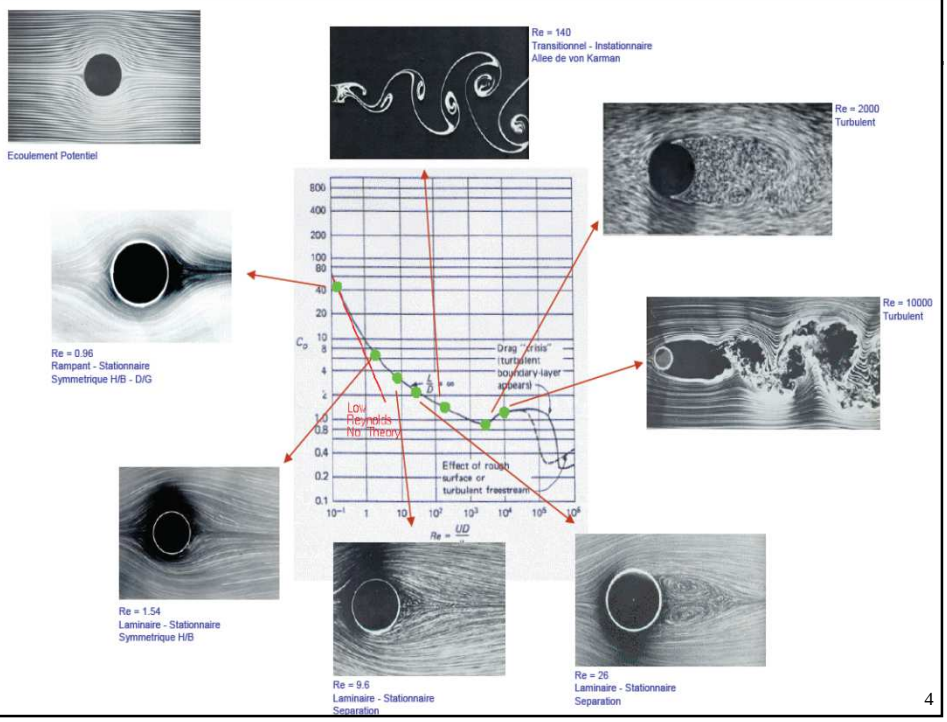




R_e<<1
"laminaire"
équation de Stokes (Re=0) ou d'Oseen (Re fini mais faible)

R_e~1
"instable"
Emission tourbillonnaire

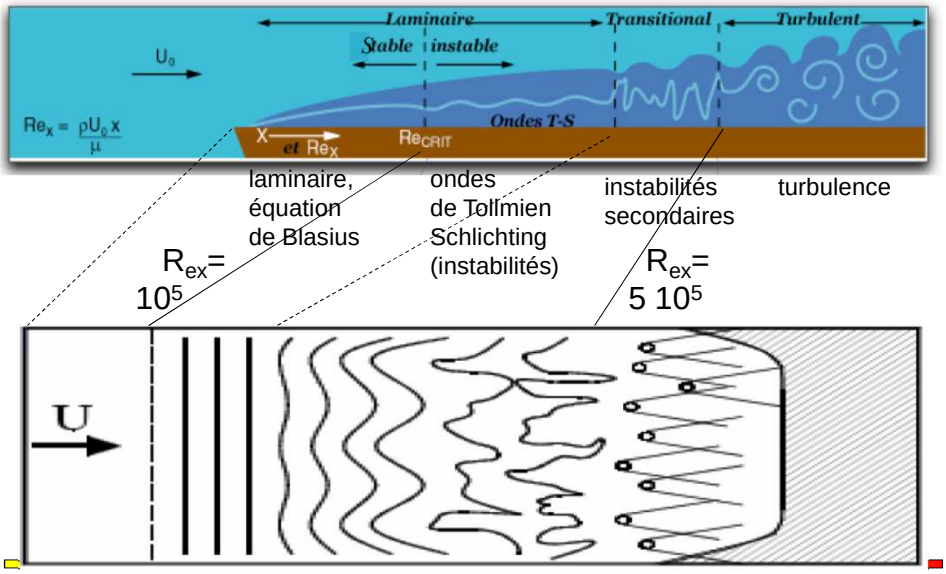
R_e>>1
"turbulent"
fluctuations de vitesse



I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

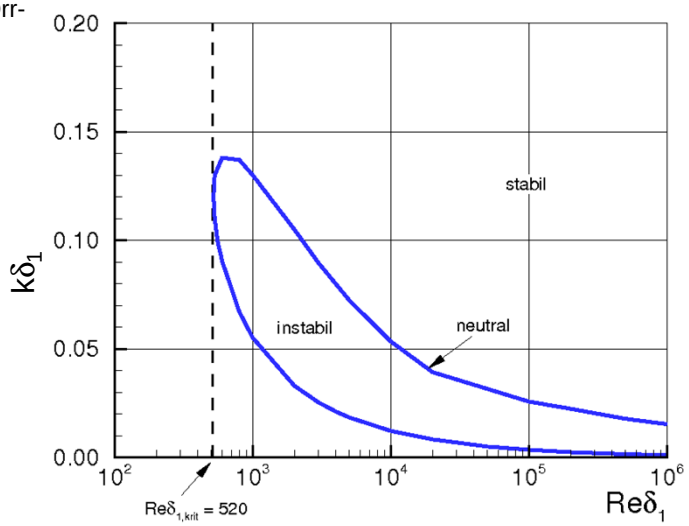
couche limite turbulente

$R_{ex} = Ux/\nu$

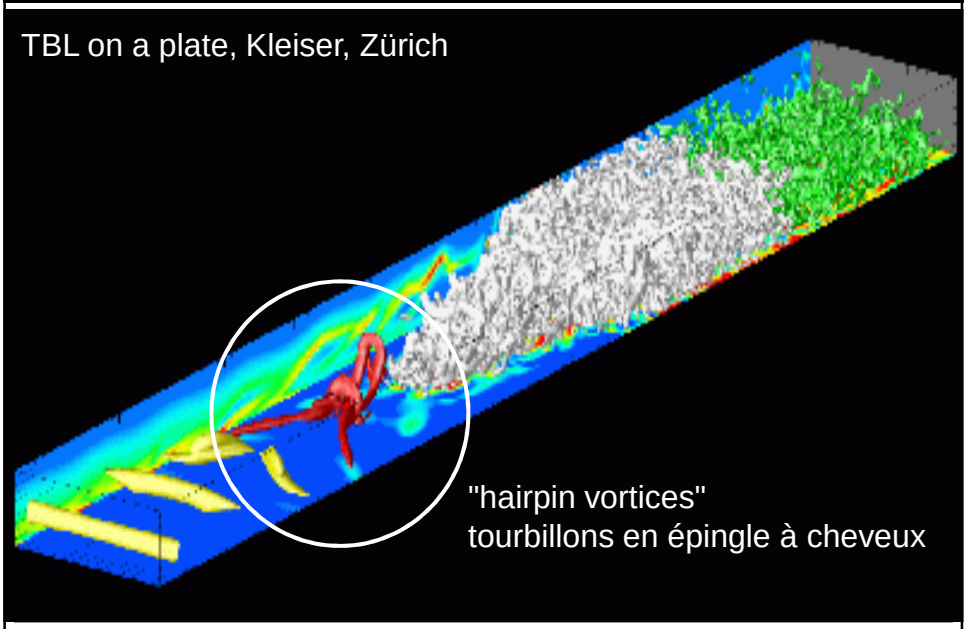


I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

Seuil d'instabilité
Equation d'Orr-Sommerfeld

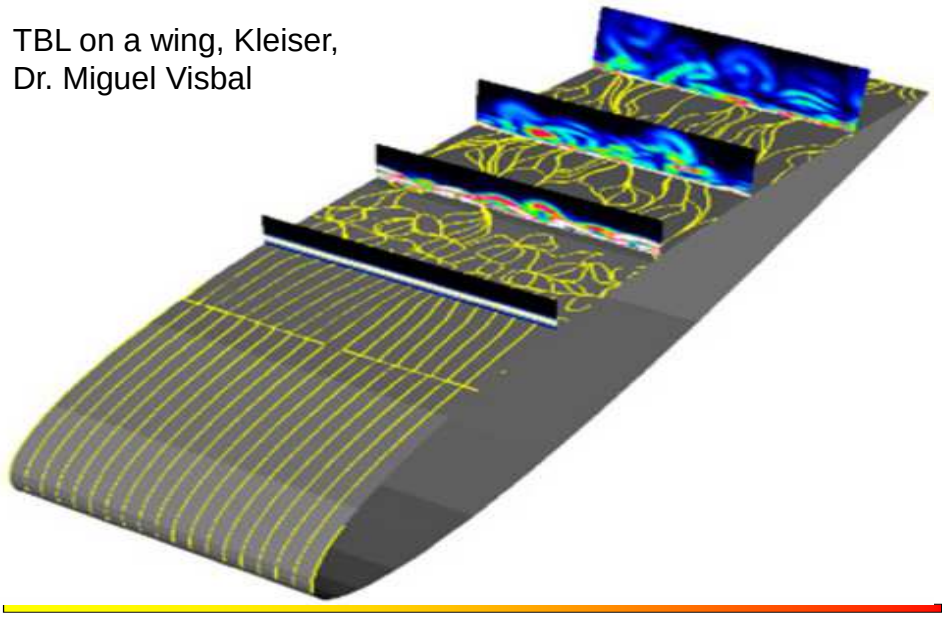


I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

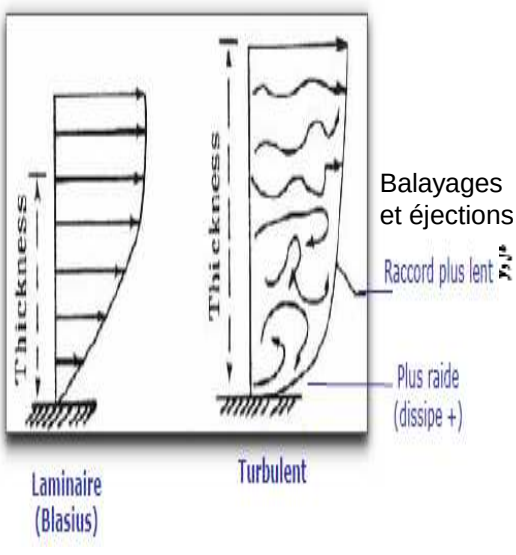


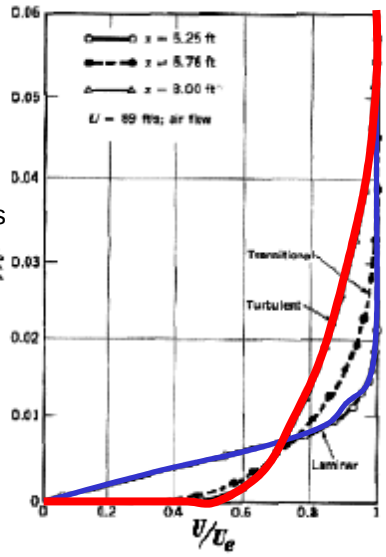
I- Définition d'un état turbulent ; Transition vers la turbulence

TBL on a wing, Kleiser,
Dr. Miguel Visbal



I- Définition d'un état turbulent ; par les conséquences





I- Définition d'un état turbulent ; diffusion turbulente

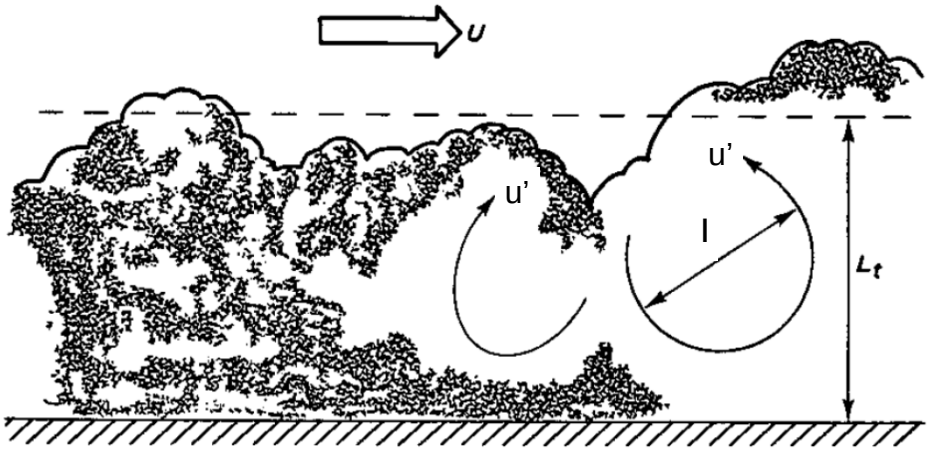


figure 1.1 de Tennekes et Lumley

I- Définition d'un état turbulent ; Petit bilan intermédiaire...

TURBULENCE : pas de définition **rigoureuse...** D'où une description phénoménologique...

- **Irregularité** : La turbulence est un état de mouvement irregulier, (en apparence) aléatoire

- **Diffusivité** : Intensification des échanges de masse, q.mvt et energie

- **Fluctuations 3D de la vorticité :**
  Un ecoulement turbulent est toujours rotationnel
  Tourbillons cohérents (eddies), mais localisés de façon “aléatoire”
  L’énergie est transférée des grandes aux petites échelles de l’écoulements par effet des interactions entre structures tourbillonnaires (mécanisme de cascade)

II- caractérisation d'un état turbulent ; statistiques

Problème de prise de moyenne et d’ergodicité…

Say we want mean of $u(x,t;\alpha)$:

- u is stochastic in both x and t (unpredictable fluctuations of x and t in a given realization)
- u is random (each realization α is different)

Ensemble mean:

$$\overline{u}(x,t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} u(x,t;\alpha)$$ → rather impractical to measure in practice

But, we can determine its **time average** at position x in a single realization $\alpha = n$:

$$\overline{u}^{T}(x,t,T;n) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} u(x,t+t';n)dt'$$ → depends on t and T !

or its **spatial average** at time t in a single realization $\alpha = m$:

$$\overline{u}^{L}(x,t,L;m) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} u(x+x',t;m)dx'$$ → depends on x and L !

II- caractérisation d'un état turbulent ; statistiques

Now, if u is **stationary** in time t so that $\overline{u} = \overline{u}(x)$

then we can expect $\overline{u}^T$ in a single realization to converge as $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty} \overline{u}^T(x,t,T;n) = \overline{u}(x) \quad \Rightarrow \text{u is ergodic in time}$$

And, if u is **homogeneous** in space x so that $\overline{u} = \overline{u}(t)$

then we can expect $\overline{u}^L$ in a single realization to converge as $L \to \infty$

$$\lim_{L\to\infty} \overline{u}^L(x,t,L;m) = \overline{u}(t) \quad \Rightarrow \text{u is ergodic in space}$$

Ergodic: Any unbiased average of a variable converges to the ensemble mean

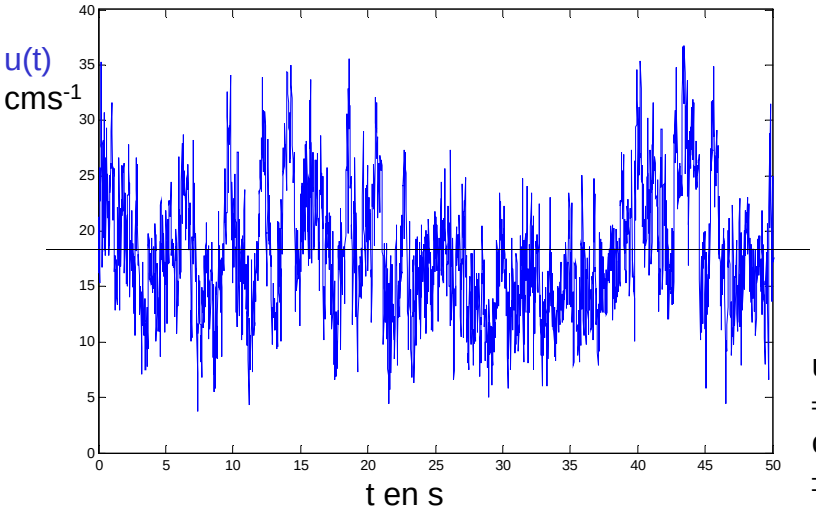
We will (try to) use the following (common) notation from here on:

$\overline{u}^T \Rightarrow \overline{u}$ time average

$\overline{u}^L \Rightarrow \langle u \rangle_x$ spatial average

$\overline{u} \Rightarrow \langle u \rangle$ ensemble average

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche temporelle



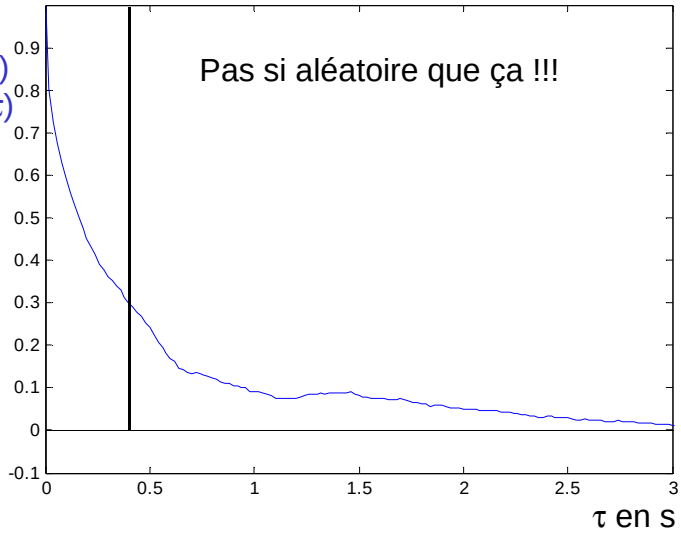
$\overline{u}$ =18 cms^{-1} ±?

u_{rms} =5.8 cms^{-1} ±?

Signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV)

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche temporelle

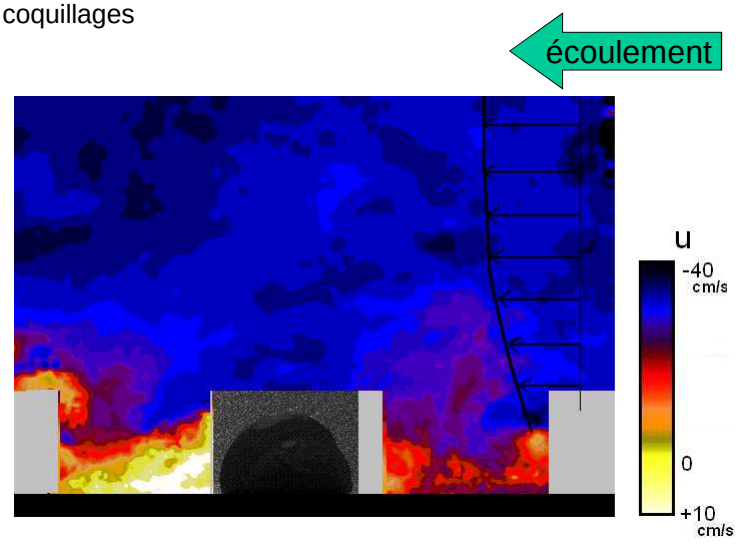
$Q_{u'u'}(\tau)$ /$Q_{u'u'}(0)$ =$R_{u'u'}(\tau)$



Temps intégral de ce signal temporel : T_{int} ~ 0.42 s

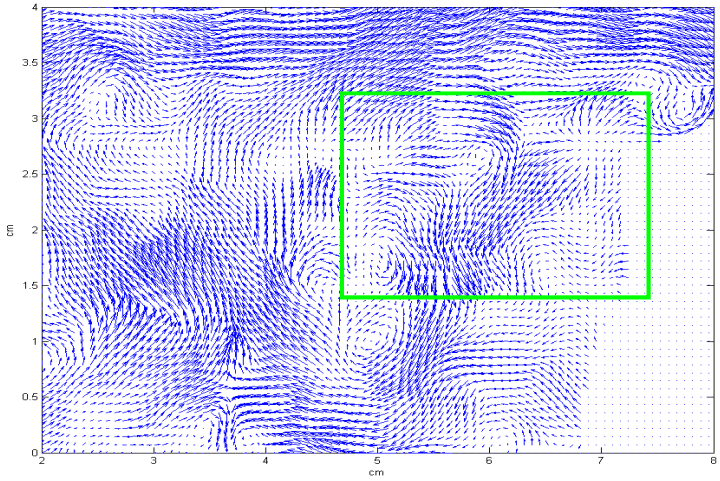
II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spatiale

Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) dans une couche limite turbulente au-dessus de coquillages



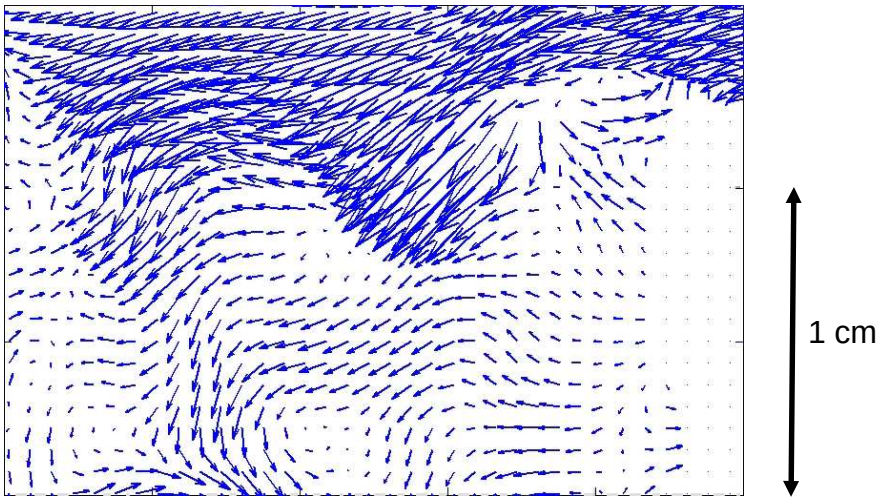
II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spatiale

fluctuations (tourbillons...)



Résolution spatiale : pas de la grille de calcul PIV = 0.7 mm

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spatiale



Résolution spatiale : pas de la grille de calcul PIV = 0.7 mm
Fréquence d'acquisition : 1 H_z

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spatiale

To help quantify the state of turbulence, 3 interrelated quantities are commonly used

- the velocity correlation function
- the energy spectrum

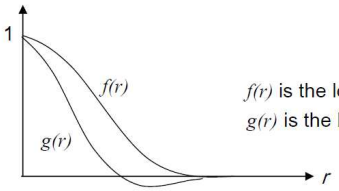
The velocity correlation function $Q_{ij} = \left\langle u_i'(\vec{x}) \cdot u_j'(\vec{x}+\vec{r}) \right\rangle$.

If turbulence is homogeneous and isotropic $u'^2=u_{rms}^2=\langle u_x'^2\rangle=\langle u_y'^2\rangle=\langle u_z'^2\rangle$

then it can be shown that two typical components of Q_{ij} can be expressed as

$$Q_{xx}(r\vec{e}_x) = u'^2 \frac{\langle u'(\vec{x})u'(\vec{x}+r\vec{e}_x)\rangle}{u'^2} = u'^2 f(r)$$

$$Q_{yy}(r\vec{e}_x) = u'^2 \frac{\langle v'(\vec{x})v'(\vec{x}+r\vec{e}_x)\rangle}{u'^2} = u'^2 g(r)$$



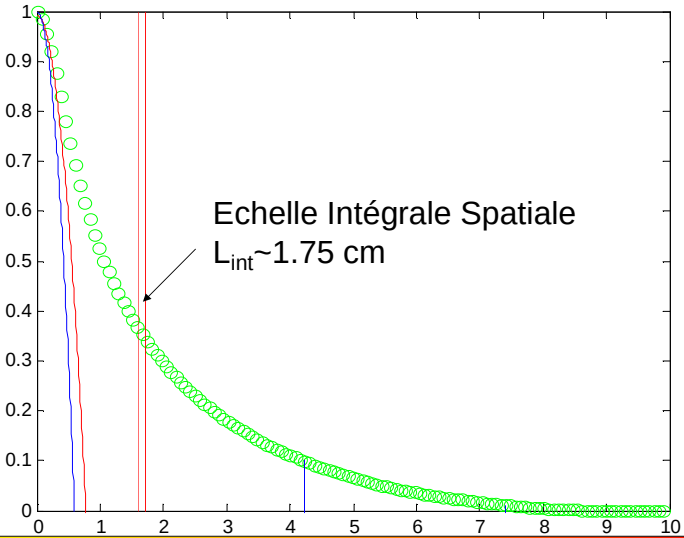
$f(r)$ is the longitudinal correlation function
$g(r)$ is the lateral correlation function

$R_{xx}=Q_{xx}/u'^2$
$R_{yy}=Q_{yy}/u'^2$
$R_{ij}=Q_{ij}/\langle u_i' u_j'\rangle$

Corrélations adim

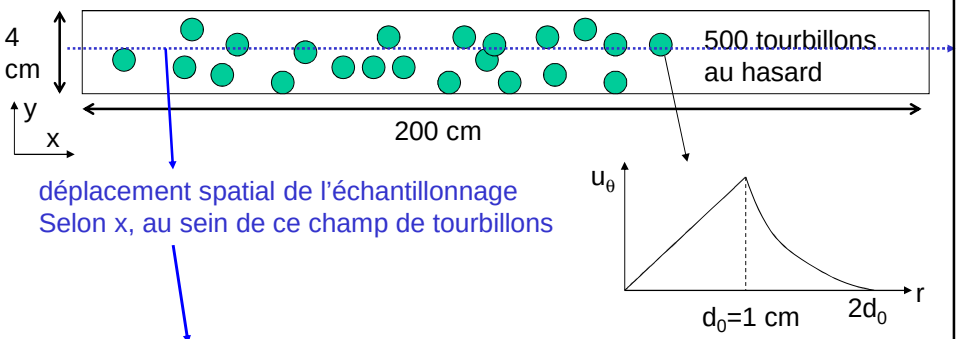
II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spatiale

Turbulence de grille, autocorrelation longitudinale $R_{u'u'}(\Delta x)$



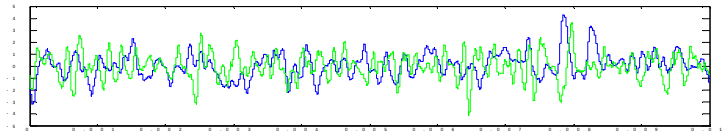
II- caractérisation d'un état turbulent ; tourbillons et L_{int}

Quel lien entre les tourbillons "apparents" et L_{int} ?



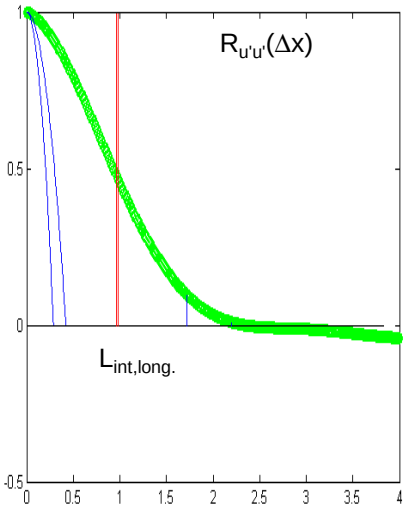
déplacement spatial de l'échantillonnage
Selon x, au sein de ce champ de tourbillons

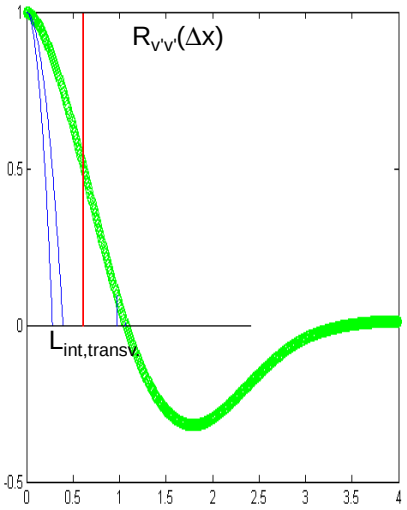
signaux spatiaux u'(x) et v'(x)



II- caractérisation d'un état turbulent ; tourbillons et L_{int}

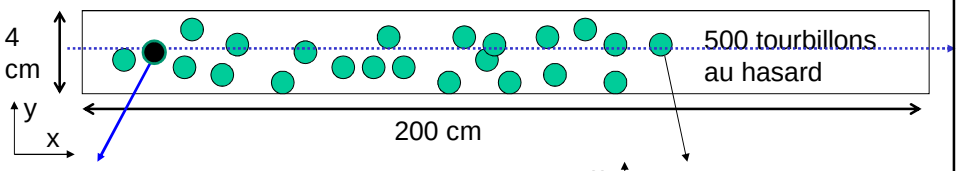
Quel lien entre les tourbillons « apparents » et L_{int} ?



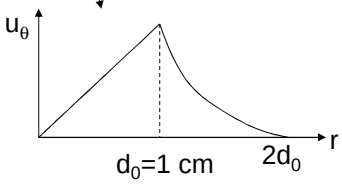


II- caractérisation d'un état turbulent ; hypothèse de Taylor

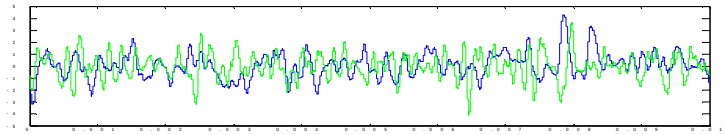
Notion de « turbulence gelée » et équivalence temps - espace



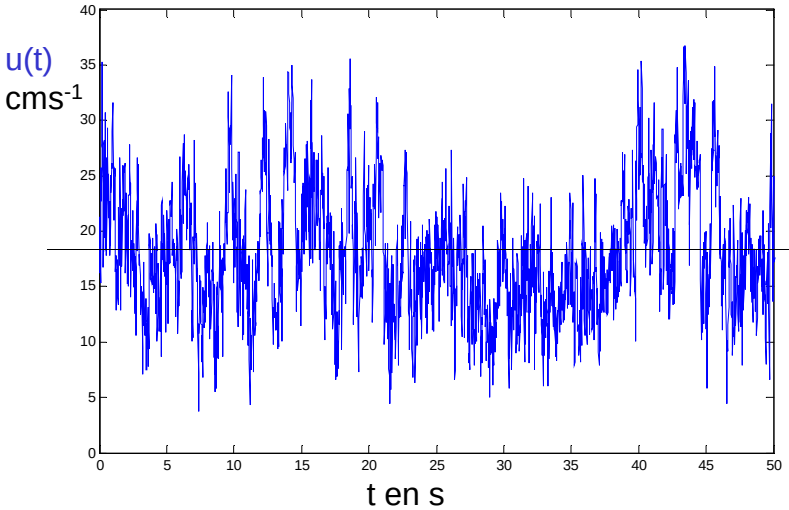
déplacement d'ensemble des tourbillons à U=1 cms^{-1} et acquisition en à point spatial toutes les 0.01 s (100 Hz)



signaux temporels u'(t) et v'(t)



II- caractérisation d'un état turbulent ; hypothèse de taylor

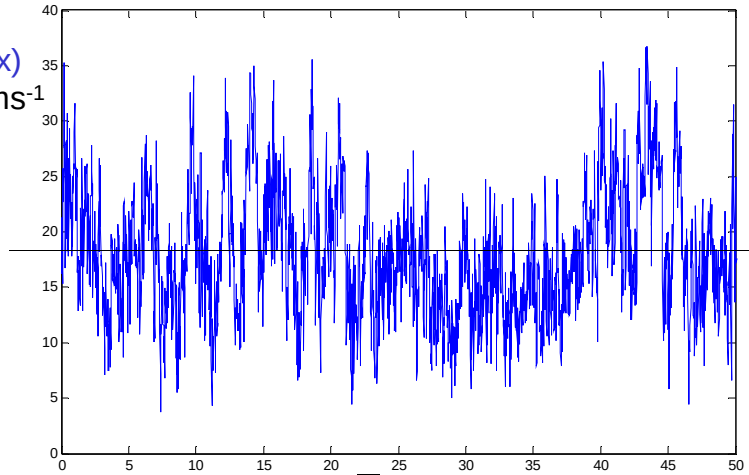


$\overline{u}$ =18 cms^{-1} ±?

u_{rms} =5.8 cms^{-1} ±?

Signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV)

II- caractérisation d'un état turbulent ; hypothèse de taylor



$\bar{u}$ =18 cms^{-1} ±?

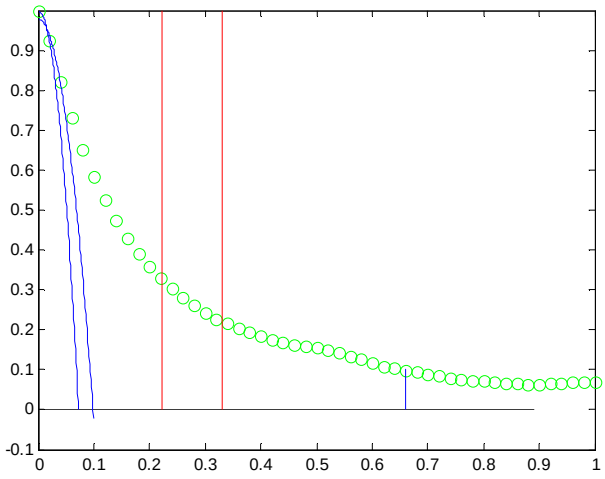
u_{rms} =5.8 cms^{-1} ±?

Signal spatial équivalent (hypothèse $u_{rms} << \bar{u}$) !!!

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale (temps)

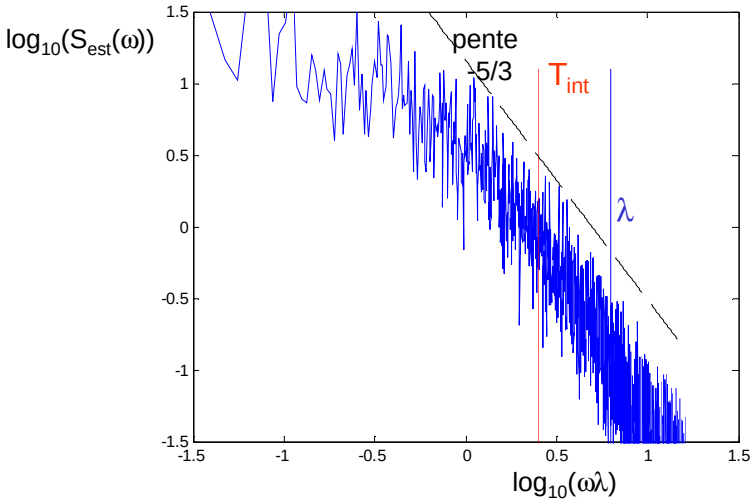
Retour au temporel : signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV)
fonction d'autocorrélation $R_{w'w'}$

longitudinale
$Q_{w'w'}(\tau)$
$/Q_{w'w'}(0)$



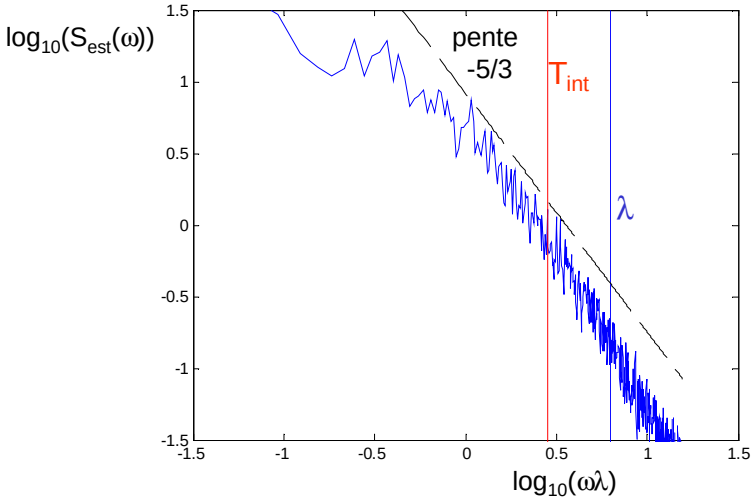
II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale (temps)

Retour au temporel : signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition de 80s.
spectre brut sur 80s de durée



II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale (temps)

Retour au temporel : signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition de 80s.
Spectre avec moyenne sur des échantillons de 20s de durée

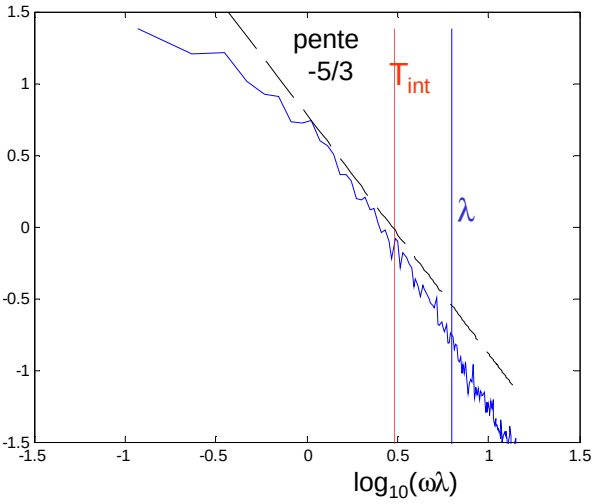


II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale (temps)

Retour au temporel : signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition de 80s.
Spectre avec moyenne sur des échantillons de 5s de durée

$\log_{10}(S_{est}(\omega))$

on s'approche de la "vraie" densité spectrale S(ω)



II- caractérisation d'un état turbulent ; spectral 3D

Another method to help evaluate the distribution of kinetic energy of the different eddies sizes, is based on the spectrum tensor $\Phi_{ij}(\vec{k})$ defined as the transform of Q_{ij}

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int Q_{ij}(\vec{r})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{r}$$

$$Q_{ij} = \int \Phi_{ij}(\vec{k})e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

For incompressible homogenous isotropic turbulence it can be shown that

$$\frac{1}{2}Q_{ii} = \frac{1}{2}\left\langle \vec{u}'(\vec{x})\cdot\vec{u}'(\vec{x}+\vec{r})\right\rangle = R(r) = u^2(g + f/2)$$

and thus by inverse transform for Q_{ii}

$$\frac{1}{2}\left\langle u^2\right\rangle = \frac{1}{2}Q_{ii} = \frac{1}{2}\int \Phi_{ii}d\vec{k} = \int_0^\infty 2\pi k^2\Phi_{ii}d\vec{k}$$

→ integrating $1/2\Phi_{ii}$ over all *k*-space gives the kinetic energy density of turbulence. So Φ_{ii} gives 'distribution' of KE in spectral space.

II- caractérisation d'un état turbulent ; spectral 3D

The **three dimensional energy spectrum** of the velocity field is defined with Φ_{ii} which represents the energy spectra for the different velocity components

$$E(k) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}$$

So that

$$\frac{1}{2}\langle \vec{u}^2 \rangle = \int_0^\infty E(k)dk \qquad (1)$$

Can show that

$$\frac{E(k)}{2k} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty rR(r)\sin(kr)dr \qquad (2a)$$

$$rR(r) = \int_0^\infty \frac{E(k)}{k}\sin(kr)dk \qquad (2b)$$

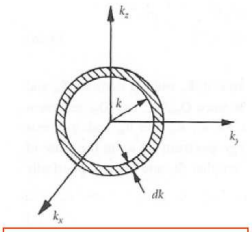


Figure 8.4 $E(k)dk$ represents the contribution to $\frac{1}{2}\langle \mathbf{u}^2 \rangle$ from Φ_{ii} which lies within a spherical annulus in k-space.

$E(k)$ has 3 properties in addition to relation (1):

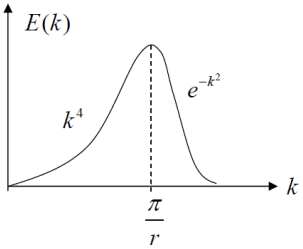
1. $E(k) \geq 0$,
2. for a random array of vortices of fixed size r, E(k) peaks around $k \sim \pi/r$
3. (1) is recovered from (2a) for $r \to 0$.

II- caractérisation d'un état turbulent ; spectral 3D

In view of the 3 properties, it is customary to *interpret* $E(k)dk$ as the contribution to $\frac{1}{2}\langle \vec{u}^2 \rangle$ from all eddies with wave-numbers in the range $k \to k+dk$ where $k \sim \pi/r$.

Although convenient, this is really a flawed view:

Spectrum for random array of eddies of size r



- although energy peaks at π/r and is primarily in range $k \sim \pi/r$, some energy is across all k
- not symmetric
- more energy at low k

Nevertheless, for range $k > l^{-1}$ and $k < \eta^{-1}$ the customary interpretation works well.

II- caractérisation d'un état turbulent ; spectral 1D

Commonly, **1D spectra** are measured. Are they different?

Most measured spectra are of the form:

$$F_{11} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^2 f(r)\cos(kr)dr, \qquad u^2 = \left\langle u_x'^2 \right\rangle$$

$$F_{22} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^2 g(r)\cos(kr)dr, \qquad \text{here } k = k_x \text{ and } r = t, x$$

with inverse transform

$$u^2 f(r) = \frac{u^2\left\langle u'(\vec{x})\cdot u'(\vec{x}+r)\right\rangle}{u^2} = 2\int_0^\infty F_{11}\cos(kr)dk$$

$$u^2 g(r) = \frac{u^2\left\langle v'(\vec{x})\cdot v'(\vec{x}+r)\right\rangle}{u^2} = 2\int_0^\infty F_{22}\cos(kr)dk$$

A third can be defined:

$$E_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\langle \vec{u}'(\vec{x})\bullet\vec{u}'(\vec{x}+\vec{r})\right\rangle\cos(kr)dr$$

$$\left\langle \vec{u}'(\vec{x})\bullet\vec{u}'(\vec{x}+\vec{r})\right\rangle = 2\int_0^\infty E_1\cos(kr)dk$$

En pratique ?

• mesures 1D :
Hypothèse de Taylor (t↔x) et formules reliant E(k), $F_{11}(\Delta x)$ et $F_{22}(\Delta x)$

• calcul des spectres ?
Au moyen de transformée de Fourier des fluctuations turbulentes et non pas des fonctions de corrélation…

$$F_{11}(k_x) = \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}E\left(\left|\tilde{u}_L(k_x)\right|^2\right)$$

ou bien, en temporel :

$$S(\omega) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}E\left(\left|\tilde{u}_T(\omega)\right|^2\right)$$

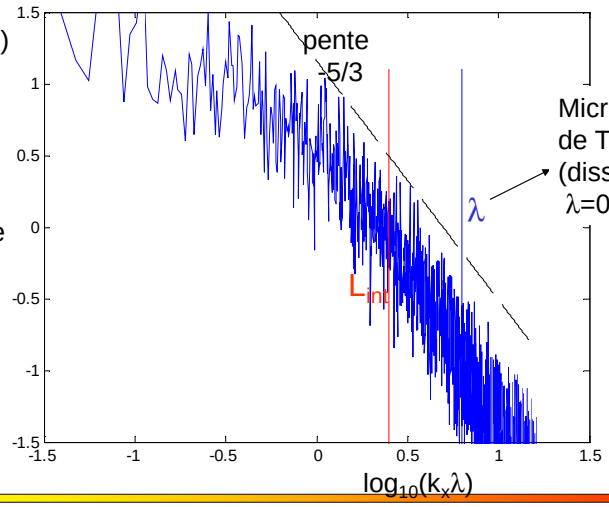
(Cf Cusumano 2005)

II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale

Analyse spectrale du signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition totale de 80s. Spectre avec un échantillon de 80s de durée (soit une longueur équivalentes de X=14.4 m)

$\log_{10}(E^{est}_{u'u'}(k_x))$

on s'approche de la "vraie" densité spectrale 1D longitudinale $E_{u'u'}(k_x)$

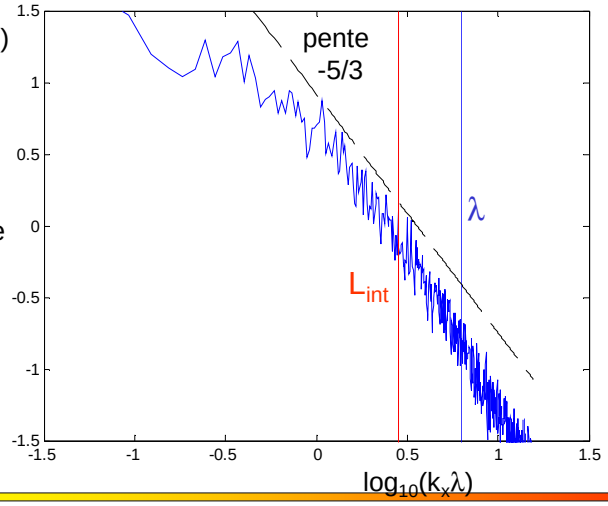


II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale

Analyse spectrale du signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition totale de 80s. Spectre avec moyenne d'ensemble sur des échantillons de 20s de durée (soit des longueurs équivalentes de X=3.6 m)

$\log_{10}(E^{est}_{u'u'}(k_x))$

on s'approche de la "vraie" densité spectrale 1D longitudinale $E_{u'u'}(k_x)$

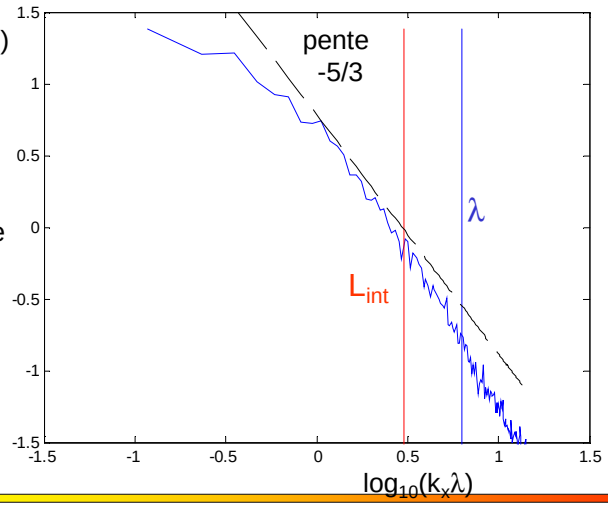


II- caractérisation d'un état turbulent ; approche spectrale

Analyse spectrale du signal temporel acquis à 50 Hz en rivière avec un vélocimètre acoustique doppler (ADV). Acquisition totale de 80s. Spectre avec moyenne d'ensemble sur des échantillons de 5s de durée (soit des longueurs équivalentes de X=0.9 m)

$\log_{10}(E^{est}_{u'u'}(k_x))$

on s'approche de la "vraie" densité spectrale 1D longitudinale $E_{u'u'}(k_x)$



II- caractérisation d'un état turbulent ; la dissipation ε

The unknown co-variances or fluxes of the mean equations are needed to solve those equations. They can either be evaluated experimentally or one can derive transport equations for these terms. Variances are also of interest to be predicted. We drop moisture now.

General procedure (example of momentum variance):

(i) expand momentum equation with mean and fluctuating parts,
(ii) subtract mean equation from (i),
(iii) multiply (ii) by $2u_j'$
(iv) take Reynolds average of (iii).

Turbulent kinetic energy

$$e = \frac{\overline{u_i'^2}}{2}$$

Velocity variance

$$\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = \boxed{-2\overline{\left(\frac{u_i'}{\rho}\right)\frac{\partial p'}{\partial x_i}}} + \boxed{2\nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}} - 2\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j' u_i'^2}}{\partial x_j} \qquad (8)$$

This equation, apart from the transport of sum of the variances, can also be used for transport equation of each component.

Simplifications:

Dissipation:

$$\boxed{2\nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2} - \boxed{2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}} \cong \boxed{-2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}} \equiv -2\varepsilon \qquad (9)$$

Pressure perturbation:

$$\boxed{-2\overline{\left(\frac{u_i'}{\rho}\right)\frac{\partial p'}{\partial x_i}}} = -\left(\frac{2}{\rho}\right)\overline{\frac{\partial u_i' p'}{\partial x_i}} + \underbrace{2\overline{\left(\frac{p'}{\rho}\right)\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right)}}_{\text{Pressure redistribution or return-to-isotrophy}} = -\left(\frac{2}{\rho}\right)\overline{\frac{\partial u_i' p'}{\partial x_i}} \qquad (10)$$

$\Rightarrow$ zero for total variance

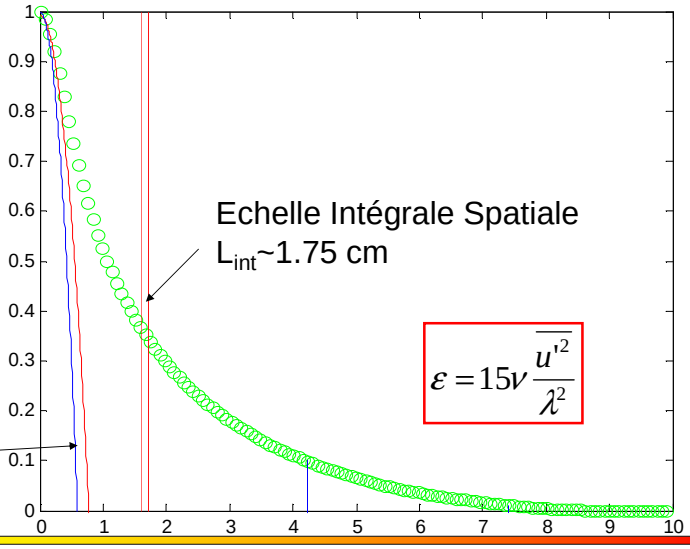
Calcul de ε ? → Calcul de $\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}$ à partir de $Q_{u'u'}(\Delta x)$???

II- caractérisation d'un état turbulent ; la dissipation ε

Turbulence de grille, autocorrelation longitudinale $R_{u'u'}(\Delta x)$

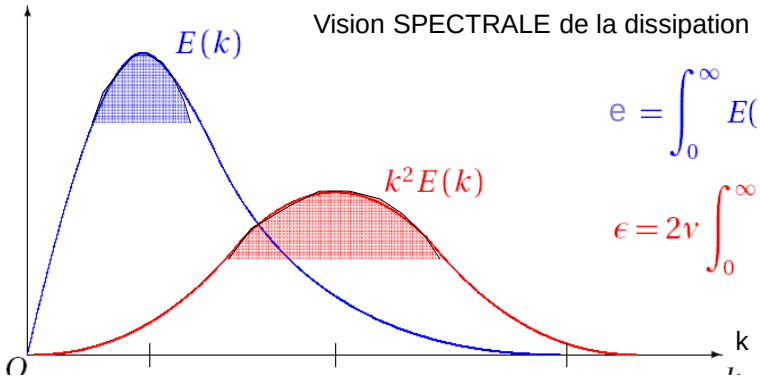
$$\overline{\left(\frac{du'}{dx}\right)^2} = -\frac{d^2 Q_{xx}(\Delta x)}{d\Delta x^2} = \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2}$$

Micro-échelle de Taylor (dissipation) λ=0.7 cm



II- caractérisation d'un état turbulent ; la dissipation ε

Vision SPECTRALE de la dissipation



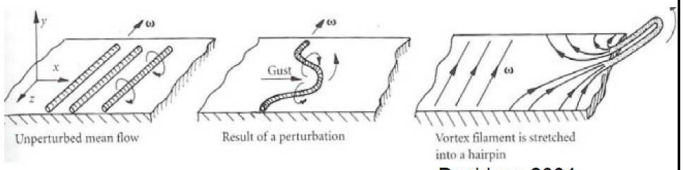
$$e = \int_0^\infty E(k)\,dk$$

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k)\,dk$$

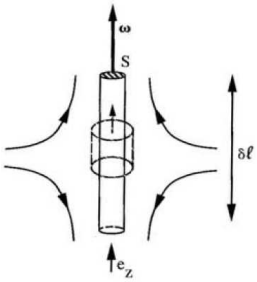
L_{int} échelle intégrale ENERGIE INJECTEE ≠ λ microéchelle de Taylor DISSIPATION

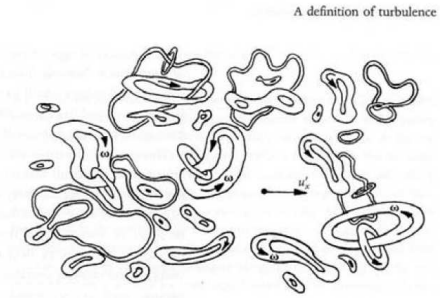
Calcul de ε en spectral ?
À partir de $Q_{ii}(r)$, par dérivation dans Fourier, car ε lié à d^2Q_{ii}/dr^2

III- modèle de turbulence homogène isotrope (THI); la cascade...

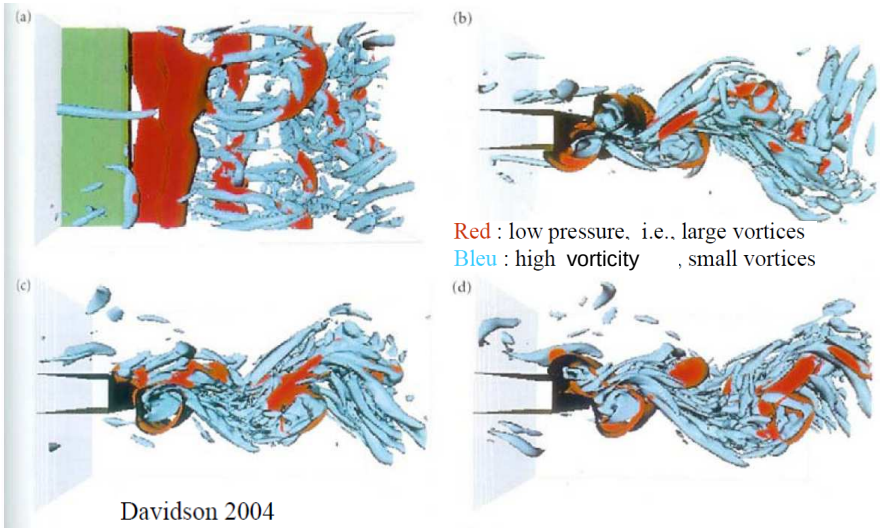


Davidson 2004





III- modèle THI; la cascade...



Red : low pressure, i.e., large vortices
Bleu : high vorticity , small vortices

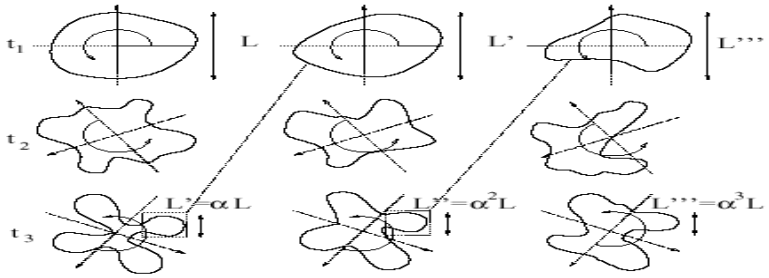
Davidson 2004

Plate 12 Numerical simulation of turbulence in the wake of a trailing edge. Red represents low pressure regions, which are associated with Karman vortices, and blue represents high vorticity levels. The figures represent instantaneous distributions at different times, increasing from (a) to (d), and show how the axial vortex tubes get wrapped around the Karman vortices. See the discussion in Section 7.3. (a) Top view. (b)–(d) Side views. [Courtesy of Y. Yao and N.D. Sandham, University of Southampton.]

III- modèle THI; principes

Interprétation dans l'espace physique du spectre d'énergie : **on définit l'energie E(l) (et leur vitesse u'(l)=(2E(l)/3)$^{1/2}$) des "tourbillons" à l'échelle spatiale l=2π/k**. On parle de **"eddies"** en anglais. (≠"vortices")...

- Les gros tourbillons ("eddies") sont instables et "explosent", transférant leur énergie vers les tourbillons plus petits.
- ce processus se produit à toutes les échelles**, jusqu'à ce que le nombre de Reynolds à l'échelle l considérée (Re(l)=u'(l)l/ν)**, devienne de l'ordre de l'unité, auquel cas les tourbillons se stabilisent et dissipent l'énergie (conversion en chaleur)



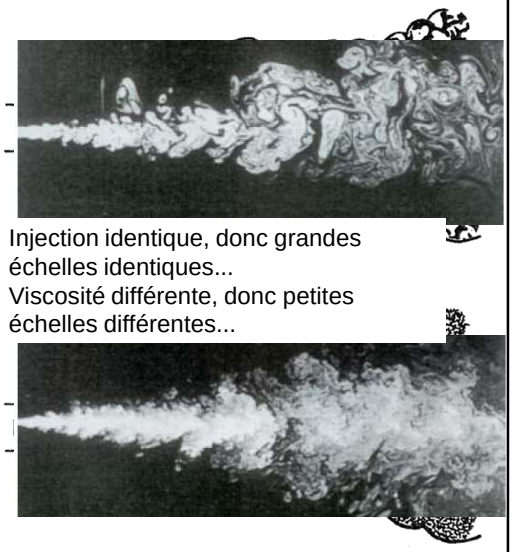
III- modèle THI; principes

La dissipation se produit à la fin de la cascade... Et donc, le **taux de dissipation ε** (même dimension que dE_t/dt) est déterminé par le premier processus dans la séquence, à savoir, le transfert depuis les "grands" tourbillons d'échelle L_{int} qui contiennent l'essentiel de l'énergie E_t (et une vitesse turbulente associée $u_{rms} \equiv (2E_t/3)^{1/2}$).

Du coup

$$\varepsilon \approx u_{rms}^3/L_{int}$$

indépendemment de la viscosité dynamique ν (à haut nombre de Reynolds).

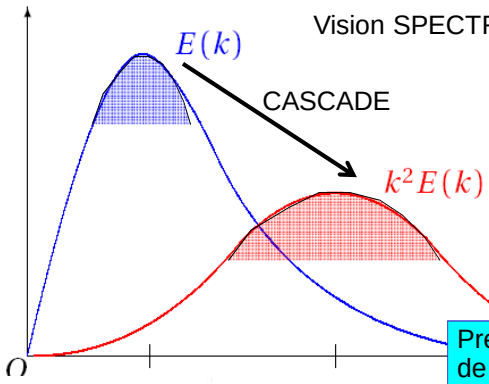


Injection identique, donc grandes échelles identiques...
Viscosité différente, donc petites échelles différentes...

Source: Tennekes & Lumley. Page 22.

III- modèle THI; modèle de Kolmogorov

Vision SPECTRALE de la cascade



$$E_t = \int_0^\infty E(k)\,dk$$

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k)\,dk$$

Première hypothèse de similarité de Kolmogorov's : *dans tous les écoulements turbulents à nombre de Reynolds suffisamment élevé, les statistiques des mouvements à petite échelle ont une forme universelle qui ne dépend que de ε et ν.*

III- modèle THI; modèle de Kolmogorov

Nombre de Reynolds turbulent, associé aux grands tourbillons :

$Re_{Lint}=E_t^{1/2}L_{int}/\nu$

(A ne pas confondre avec le nombre de Reynolds de l'écoulement, même si:

$Re=LU/\nu \sim E_t^{1/2}L_{int}/\nu$ à un facteur multiplicatif près…)

Echelles de Kolmogorov (échelles dissipatives) construites à partir de ε et ν ?

Longueur de Kolmogorov	$l_\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$
Vitesse de Kolmogorov	$u_\eta=(\nu\varepsilon)^{1/4}$
Temps de Kolmogorov	$\tau_\eta=(\nu/\varepsilon)^{1/2}$

$\varepsilon = 15\nu u'^2/\lambda^2 \longrightarrow \lambda \approx (10\nu E_t/\varepsilon)^{1/2}$

On trouve :

$\lambda/L_{int}=10^{1/2}Re_{Lint}^{-1/2}$

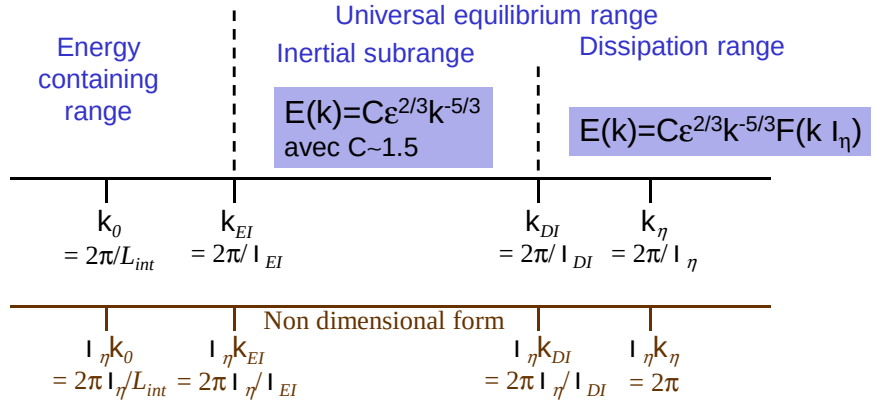
$l_\eta/L_{int}=(Re_{Lint})^{-3/4}$

$\lambda/l_\eta=10^{1/2}Re_{Lint}^{1/4}$

→ Limitation intrinsèque d'une DNS (Simulation Directe Numérique) !!!

Pour Re_{Lint} assez grand, il existe des échelles spatiales intermédiaire l qui peuvent vérifier $L_{int} >> l >> l_\eta$

→ Ne dépendent pas de la viscosité ν non plus !!!

III- modèle THI; modèle de Kolmogorov

Seconde hypothèse de similarité de Kolmogorov's : *dans tous les écoulements turbulents à nombre de Reynolds suffisamment élevé, les statistiques des mouvements aux échelles intermédiaires l telles que $L_{int} >> l >> l_\eta$ ne dépendent que de ε (et plus de ν).*