

Enoncé de TP numérique sur Matlab "Couche limite turbulente"

Durée : 4 heures (2 séances)

L'objectif de ce TP est d'analyser des données expérimentales d'un écoulement turbulent au moyen des outils statistiques proposés en cours (moyennes, calculs d'intensité turbulente, fonctions de corrélation et d'auto-corrélation, et, si le temps le permet, transformée de Fourier et densité spectrale).

On dispose pour cela de données spatio-temporelles obtenues par PIV (technique de mesure optique) pour une turbulence de couche limite turbulente dans un canal hydraulique en laboratoire au dessus d'un fond rugueux de grains de diamètre médian 2 mm.

Les données sont disponibles sur le lien suivant : <https://www.imft.fr/Ondes-et-turbulences>

1 Principe de mesures par PIV d'un écoulement turbulent en canal hydraulique

Dans les canaux hydrauliques de l'IMFT, il est possible de générer des couches limites turbulentes dans des écoulements à surface libre.

Des mesures par PIV sont alors réalisées : des particules hautement réfléchissantes sont introduites dans le canal (billes creuses de verre de diamètre 10 micromètres). Les particules sont suffisamment petites et de densité proches de l'eau pour qu'on puisse faire l'hypothèse qu'elles suivent complètement l'écoulement des particules fluides (ce sont des traceurs passifs). Ces particules sont éclairées au moyen d'une tranche laser de quelques millimètres d'épaisseur qui est verticale et alignée dans le sens de

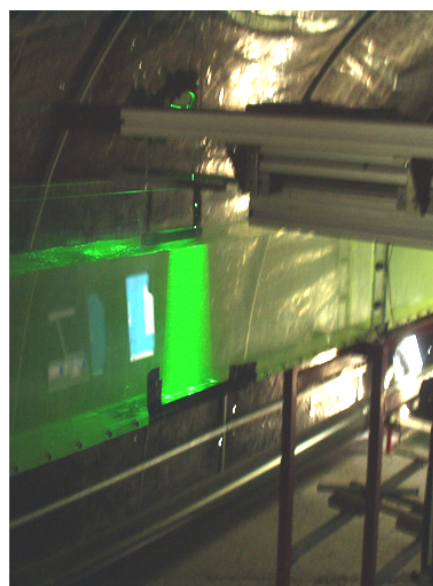
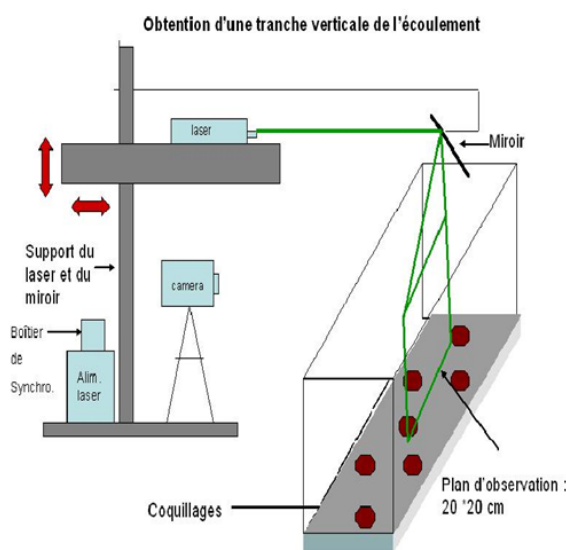


FIGURE 1 – Schéma de principe (à gauche) et photo (à droite) du dispositif expérimental de mesure par PIV dans un plan vertical longitudinal dans un canal hydraulique de l'IMFT.

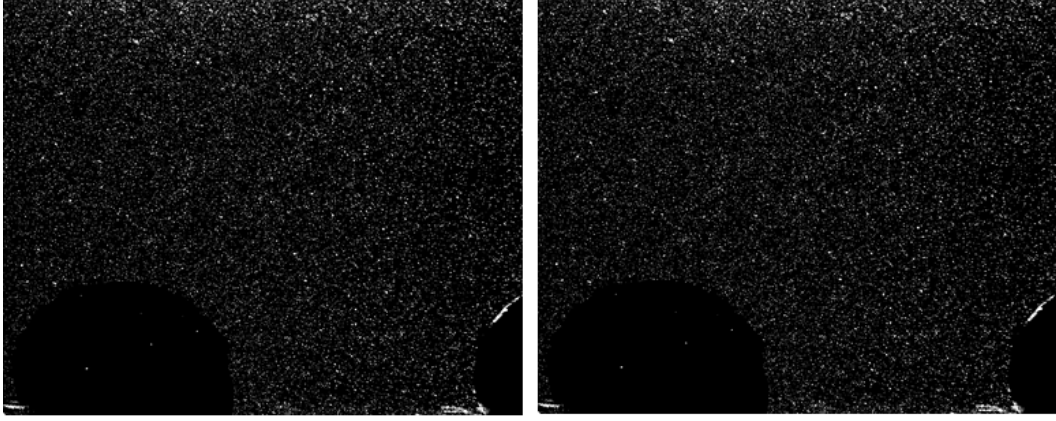


FIGURE 2 – Exemple de deux champs de particules successif enregistrés par la caméra PIV à l’instant t (à gauche) et à $t+dt$ (à droite). On reconnaît d’une image sur l’autre les paquets de particules, qui se sont en fait déplacées de plusieurs pixels dans l’image, ce qui servira à calculer le champ de vitesse (deux composantes dans le plan). La mesure est réalisée ici pour un fond recouvert de coquillages.

l’écoulement (tranche verticale longitudinale). Une caméra située sur le côté du canal vient enregistrer la position des particules éclairées (voir par exemple les figures 1 et 2).

En comparant deux images successives enregistrées par la caméra, il est alors possible de calculer au moyen d’un algorithme le déplacement de petits paquets de particules (qui forment un motif). Le temps entre deux images étant connus, ce déplacement est converti en une mesure de vitesse dans le plan de la tranche laser. Pour chaque doublet d’images (appelé "burst"), une mesure instantané de deux composantes de la vitesse (u et w) est réalisée dans le plan de la tranche laser sur une grille cartésienne en x (direction longitudinale de l’écoulement parallèle au fond du canal) et z (direction perpendiculaire au fond du canal).

Dans le fichier "serietemporelle_uw_mesurePIV_canal_extrait.mat", on trouvera une série temporelle de 1000 mesures PIV réalisées à basse fréquence (3 Hz) dans un écoulement de couche limite turbulente en développement au-dessus d’un lit de grains de diamètre 2 mm, avec 100 points de mesure dans la direction longitudinale x . Le fichier "serietemporelle_uw_mesurePIV_canal_full.mat" contient une version avec 319 points de mesure dans la direction x (un peu gros, peut-être au-delà des capacités de calcul des ordinateurs).

Les fichiers contiennent une matrice spatio-temporelle avec 3 dimensions pour la composante longitudinale de la vitesse $u(x, z, t)$ et pour la composante verticale $w(x, z, t)$ ainsi que les vecteurs de la position longitudinale x et de la position verticale z . Attention, l’origine des coordonnées est arbitraire et correspond à la hauteur moyenne des grains collés sur le fond du canal. Par ailleurs, les vecteurs faux (erreur de mesure) ont été détectés et remplacés par des *NaN* (Not a Number).

2 Calcul du champ moyen et des statistiques turbulentes

Dans un premier temps, on souhaite calculer et afficher les différentes composantes statistiques que sont les composantes du champ moyen $\bar{u}(x, z)$ et $\bar{w}(x, z)$ dans le plan laser vertical, et les trois composantes du tenseur de Reynolds accessibles avec cette méthode, à savoir $\overline{u'^2}(x, z)$, $\overline{w'^2}(x, z)$ et $\overline{u'w'}(x, z)$.

1. Afficher quelques exemples de champ de vitesse à différents instants t sous forme de champ vectoriel $\vec{u}(x, z, t)$. Identifier des vecteurs faux dans ce champ.
2. Effectuer la décomposition de Reynolds pour tout le champ mesuré, en procédant à une moyenne temporelle pour le calcul (estimation) du champ moyen.
3. Afficher le champ moyen calculé, soit sous forme de champ vectoriel $\vec{\bar{u}}(x, z)$ soit sous forme de niveau de gris ou de couleurs (isovaleurs de $\bar{u}(x, z)$ ou $\bar{w}(x, z)$).

4. Afficher quelques exemples de champ des fluctuations à différents instants t sous forme de champ vectoriel $\vec{u}'(x, z, t)$. Quelles structures sont visibles ?
5. Afficher les champs des différentes composantes du tenseur de Reynolds $\overline{u'^2}(x, z)$, $\overline{w'^2}(x, z)$ et $\overline{u'w'}(x, z)$.

3 Structure verticale de la couche limite turbulente

Dans cet écoulement, la couche limite s'est développée le long d'un fond constitué de grains collés de diamètre moyen $d_{50} = 2 \text{ mm}$ sur environ 2.4 m en amont de la zone de mesure. La couche limite n'est donc pas complètement développée jusqu'à la surface libre située à environ 12 cm du fond. Cependant, on peut considérer qu'au niveau de la zone de mesure, l'évolution des statistiques le long de la direction longitudinale x est donc négligeable. Pour estimer les profils verticaux des composantes statistiques du champ de vitesse, on peut donc également réaliser une moyenne selon la direction x (hypothèse d'ergodicité spatiale selon x). On notera $\langle \rangle_x$ cette moyenne spatiale. Et on appellera double moyenne de f , qu'on notera donc $\langle \bar{f} \rangle_x(z)$, la statistique obtenue en calculant la moyenne temporelle puis selon la direction longitudinale x .

6. Tracer plusieurs profils verticaux de la composante longitudinale du champ moyen $\bar{u}(x, z)$ en différentes positions de x .
7. Calculer le profil vertical de vitesse longitudinale doublement moyennée $\langle \bar{u} \rangle_x(z)$ et comparer aux différents profils précédents.
8. Vérifier que le le profil vertical de vitesse verticale doublement moyennée $\langle \bar{w} \rangle_x(z)$ est nul ou presque.
9. Calculer et tracer les profils verticaux des statistiques doublement moyennées $\langle \overline{u'^2} \rangle_x(z)$, $\langle \overline{w'^2} \rangle_x(z)$ et $\langle \overline{u'w'} \rangle_x(z)$.
10. Estimer la valeur de la vitesse de frottement u^* à partir du profil de $\langle \overline{u'w'} \rangle_x(z)$, en extrapolant le profil linéairement vers le fond moyen constitué des grains, ou en prenant sa valeur maximale.
11. Estimer l'épaisseur de la couche limite en extrapolant le profil linéairement vers la valeur nulle et en définissant l'épaisseur comme la hauteur à laquelle $\langle \overline{u'w'} \rangle_x(z)$ atteint 0.
12. Calculer et tracer le profil de longueur de mélange $\ell_m(z)$ à partir de sa définition dans la relation liant tenseur de Reynolds et gradient du champ moyen de vitesse, qui s'écrit ici sous la forme :

$$-\langle \overline{u'w'} \rangle_x = \nu_t \frac{d \langle \bar{u} \rangle_x}{dz} = \ell_m^2 \left| \frac{d \langle \bar{u} \rangle_x}{dz} \right| \frac{d \langle \bar{u} \rangle_x}{dz}$$

13. vérifier si le profil de ℓ_m est linéaire vers le bas de la couche limite et vérifie une loi en $\ell_m(z) = \kappa z$ avec κ la constante de Kolmogorov
14. Représenter le profil de vitesse doublement moyennée $\langle \bar{u} \rangle_x(z)$ en représentation semi-log et déterminer si le profil de vitesse est bien logarithmique de la forme :

$$u^+ = \frac{\langle \bar{u} \rangle_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(z/k_s) + 8.5$$

où k_s est la rugosité hydraulique introduite par Nikuradse, qui est supposée être corrélée avec le diamètre moyen des grains pour un écoulement turbulent hydrauliquement rugueux sur un fond sédimentaire.

15. Estimer k_s pour cet écoulement. Est-il corrélé avec la valeur du diamètre des grains ?
16. Calculer l'épaisseur δ_{nu} l'épaisseur de la sous-couche visqueuse équivalente si l'écoulement avait lieu sur un fond lisse.
17. Comparer k_s et δ_{nu} . L'écoulement est-il hydrauliquement lisse ou hydrauliquement rugueux ?
18. Tracer les profils de $u_{rms} = \sqrt{\langle \overline{u'^2} \rangle_x}$ et $w_{rms} = \sqrt{\langle \overline{w'^2} \rangle_x}$ adimensionnés par la vitesse de frottement u^* . Comparer aux lois habituelles utilisées dans la littérature (exponentielles décroissantes).

4 Analyse des structures tourbillonnaires de la turbulence par autocorrélation

On cherche maintenant à identifier les tourbillons formant la turbulence. Pour cela, on peut utiliser une description en fonctions de corrélation de la turbulence (ou une représentation spectrale).

Pour comparer deux signaux stochastiques de moyenne temporelle nulle $f_1(x, t)$ et $f_2(x, t)$, on introduit en turbulence une fonction de corrélation spatiale définie de façon continue comme :

$$Q_{f_1 f_2}(\Delta x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_1(x) f_2(x + \Delta x) dt$$

Cette fonction permet de quantifier la ressemblance entre les deux signaux $f_1(x, t)$ et $f_2(x + \Delta x, t)$. La corrélation adimensionnelle est définie comme :

$$R_{f_1 f_2}(\Delta x) = \frac{Q_{f_1 f_2}(\Delta x)}{\sqrt{f_1^2} \sqrt{f_2^2}}$$

Pour deux signaux totalement identiques ($f_1 = f_2$), on obtient bien $R_{f_1 f_2}(\Delta x = 0) = 1$, et pour deux signaux totalement décorrélés, on trouve $R_{f_1 f_2}(\Delta x) = 0$.

19. En discrétisant la définition donnée ci-dessus, calculer la fonction d'auto-corrélation de la fluctuation turbulent longitudinale $R_{u'u'}(\Delta x)$ à différentes altitudes z à travers la couche limite.
20. Calculer la fonction d'auto-corrélation de la fluctuation turbulent verticale $R_{w'w'}(\Delta x)$ à différentes altitudes z à travers la couche limite.
21. Estimer à différentes altitudes la longueur intégrale longitudinale de la turbulence $L_{int,u'}$ définie comme :

$$L_{int} = \int_0^{+\infty} R_{u'u'}(\Delta x) d\Delta x$$

Pour cela, intégrer numériquement les fonctions d'autocorrélation $R_{u'u'}(\Delta x)$. On arrêtera l'intégration lorsque $R_{u'u'}$ passe en dessous de 0.1 (troncation).

22. Faites la même chose pour la longueur intégrale transverse de la turbulence $L_{int,w'}$ définie comme :

$$L_{int} = \int_0^{+\infty} R_{w'w'}(\Delta x) d\Delta x$$

23. Comment évolue L_{int} avec l'altitude z ? Comparer à l'évolution de ℓ_m .

5 Analyse spectrale

24. Calculer à différentes altitudes le spectre 1D de la turbulence.

Pour cela, il faut calculer pour chaque réalisation (à chaque instant t) le spectre 1D spatial selon x de la fluctuation longitudinale $u'(x, t)$, notée $\tilde{u}'(k_x, t)$, et calculé par FFT (transformée de Fourier discrète rapide). Ensuite, on procède à une moyenne temporelle de tous ces spectres pour obtenir une estimation de la densité spectrale 1D.

25. Ce spectre présente-t-il une pente de $-5/3$ comme le prédit Kolmogorov ?

Annexe : quelques fonctions matlab utiles

Il est toujours très utile d'aller voir la syntaxe exacte sur l'aide de matlab (help).

1. *mean* : permet de calculer la moyenne d'un vecteur ou d'un tenseur d'ordre N. avec l'option 'omitnan', on peut éliminer de la moyenne les valeurs NaN (Not a number). Par exemple, `mean(M,2,'omitnan')` permet de faire la moyenne sur la deuxième dimension de M en ne tenant pas compte des NaN.
2. *quiver* : permet de tracer un champ vectorielle 2D. Par exemple, `quiver(u,w)` permet de tracer le champ de vecteurs si u et w sont deux matrices identiques de dimension 2.
3. *contourf* : permet de tracer les isocontours d'un champ 2D. Par exemple, `contourf(M)` permet de tracer les isocontours du champ 2D $M(x,y)$.
4. *sqrt* : pour le calcul de la racine carrée.
5. *rand*, *randi*, *randn* : pour générer des nombres aléatoires.
6. *fft* : pour calculer les transformées de Fourier discrètes d'un signal (fft pour fast fourier transform).