Examen de M2 pro « Turbulence »

13 octobre 2016, M2 pro, 1er semestre 2016-2017

Conditions de l'examen :
- Documents et matériel autorisés : tous documents de cours et TD, calculatrice, règle.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.
- Présentation : une pénalité sera appliquée aux copies illisibles ou mal rédigées.

1 DNS d'une couche limite sur fond lisse (4 points)

On souhaite réaliser une simulation directe numérique d'un écoulement de couche limite dans une conduite lisse de rayon R. On peut imposer un gradient de pression dP/dx constant entre l'entrée et la sortie de la conduite. Calculer ce que vaut τ_p le frottement pariétal qui s'oppose au gradient de pression. En déduire la vitesse de frottement u^* pour la couche limite.
Dans la zone de loi log, la production turbulente $\mathcal{P} = -\overline{u'w'}d\overline{u}/dz$ s'équilibre avec la dissipation ϵ. Utiliser la forme du profil et la vitesse de frottement pour estimer $\mathcal{P}$ au début de la zone de loi log (qui démarre vers $y^+ \approx 30$). En déduire ϵ.
Quelle pas de maillage doit-on choisir pour pouvoir réaliser la simulation ? Quelle taille de domaine de simulation vous semble approprié ?

2 Ecoulement de Couette turbulent (6 points)

On considère un écoulement de Couette entre deux plaques planes parallèles infinies séparées d'une distance 2h, animées d'une vitesse $2U_0$ l'une par rapport à l'autre (voir la figure 1). On se place dans le référentiel tel que la plaque supérieure ait une vitesse $+U_0$ et la plaque inférieure une vitesse $-U_0$. On note $Re = U_0 h/\nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement. La direction transverse (perpendiculaire au plan de la figure 1) étant très grande devant h, on peut considérer le problème comme purement bidimensionnel.

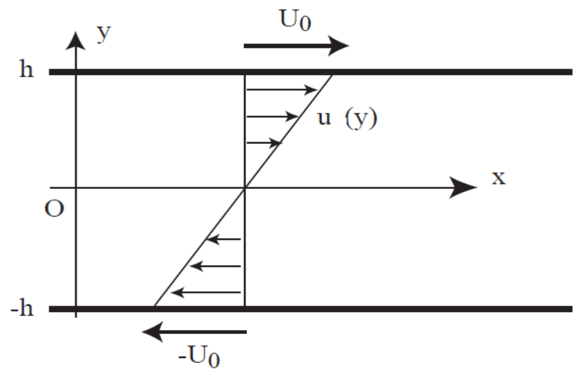

Figure 1 – Géométrie de l'écoulement de Couette plan et du profil de vitesse correspondant dans le cas laminaire.

Il n'existe pas de gradient de pression moyen selon x, et toutes les quantités physiques sont supposées statistiquement stationnaires et invariantes par translation selon x.

1. Retrouver que dans le cas laminaire, le profil de vitesse dans cette géométrie est donné par $u(y) = U_0 y/h$.
2. On cherche à déterminer si dans le cas turbulent, le profil de vitesse moyen $\overline{u}(y)$ peut également s'écrire sous cette forme. En introduisant la solution $\overline{u}(y) = U_0 y/h$ dans l'équation RANS selon x, montrer que $\overline{u'v'} = 0$ dans tout l'écoulement. Qu'en concluez-vous ?
3. On va chercher à déterminer le profil moyen $\overline{u}(y)$ dans le cas turbulent. On introduit la coordonnée réduite $\eta = y/h$, et on pose

$$\overline{u}(y) = U_0 f(\eta) \ et \ \overline{u'v'} = U_0^2 g(\eta) \tag{1}$$

   Montrer que l'on doit vérifier :

$$f'' = Re\ g' \tag{2}$$

   où les ' désignent des dérivations par rapport à η.
4. Préciser la parité et les conditions aux limites $\eta = \pm 1$ des fonctions $f(\eta)$ et $g(\eta)$.

Pour déterminer la fonction $f(\eta)$, il faut une relation supplémentaire reliant f et g. Pour cela, on peut introduire une viscosité turbulente $\nu_t(y)$. Rappeler alors comment s'exprime $\overline{u'v'}$ en fonction du champ moyen $\overline{u}(y)$.
On suppose que les fluctuations responsables du transfert de quantité de mouvement sont de vitesse caractéristique U_0 et de taille $\ell(y)$, et l'on pose donc

$$\nu_t(y) = \alpha U_0\ \ell(y)$$

où α est une constante sans dimension.

5. Justifier que l'on puisse choisir $\ell(y) = h - |y|$. Par symétrie, on pourra ne considérer que la moitié supérieure du problème ($y > 0$), et ainsi oublier la valeur absolue.
6. En déduire une relation entre g et f'
7. En utilisant l'équation (2), obtenir l'équation différentielle suivante pour f :

$$f'' \left(1 + \frac{1}{\alpha Re} - \eta\right) = f' \tag{3}$$

8. La solution analytique pour cette fonction f est tracée dans la figure 2 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Comment interprétez vous physiquement l'évolution du profil de vitesse avec le Reynolds ?

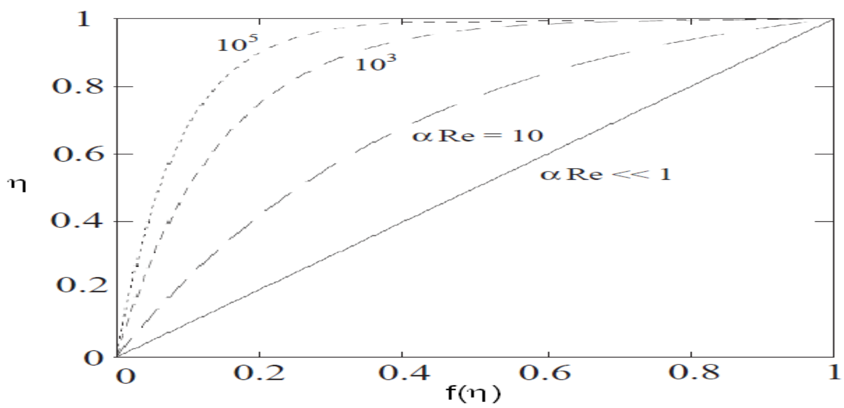

FIGURE 2 – Profils de vitesse adimensionnée donnés par (2) pour différentes valeurs de αRe.

3 Mélange d'une espèce chimique dans un jet turbulent (8 points)

Dans un certain nombre de procédés industriels faisant intervenir des réactions (combustion par exemple), il est utile de caractériser les propriétés de mélange d'une espèce chimique par un écoulement turbulent. On considère pour cela l'équation de diffusion-advection qui décrit l'évolution du champ de concentration $c(\vec{x};t)$ dans un champ de vitesse $u_i(\vec{x};t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x_j^2}$$

où D est la diffusivité de l'espèce considérée.

1. On introduit la décomposition de Reynolds pour chacun des champs, $u_i = \overline{u_i} + u_i'$ et $c = \overline{c} + c'$. Ecrire l'équation d'évolution pour la concentration moyenne $\overline{c}$.
2. Montrer que l'équation d'évolution pour le champ de fluctuations de concentration c' s'écrit :
$$\frac{Dc'}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-u_j'\overline{c} + \overline{u_j'c'} - u_j'c'\right) + D\frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2}$$
où on a introduit la dérivée totale associée à l'écoulement moyen, $D/Dt = \partial/\partial t + \overline{u_j}\partial/\partial x_j$.
3. On propose de caractériser la qualité du mélange à partir de la quantité $k_c = \frac{1}{2}\overline{c'^2}$: il s'agit de l'analogue de l'énergie cinétique turbulente k pour les fluctuations de concentration. Montrer que cette quantité vérifie l'équation de transport suivante :
$$\frac{Dk_c}{Dt} = P_c - \epsilon_c + T_c \tag{4}$$
avec $P_c = -\overline{u_j'c'}\partial\overline{c}/\partial x_j$ le terme de production de fluctuations de concentration par couplage entre le flux $-\overline{u_j'c'}$ et le gradient moyen $\partial\overline{c}/\partial x_j$, $\epsilon_c = D\overline{(\partial c'/\partial x_j)^2}$ le terme de dissipation, et $T_c = \partial/\partial x_j(...)$ un terme de transport que l'on identifiera.

On considère un jet turbulent de l'espèce pure (de concentration normalisée $c = 1$ en entrée du jet) dans de l'air au repos ($c = 0$). Le jet, statistiquement stationnaire, se propage selon les x croissant, et s'étale dans la direction transverse y (on ne considère pas la direction z pour simplifier : on suppose le problème purement bidimentionnel en cartésien). On suppose que $\overline{u_x} >> \overline{u_y}$, et que la dimension transverse selon y est petite comparée à la direction d'évolution selon x.

4. Que devient l'équation (4) tenant compte des hypothèses effectuées ?

On demande de répondre aux questions suivantes uniquement par un raisonnement intuitif (sans calcul, mais avec des explications).

5. Dessiner l'allure du profil de vitesse moyenne $\overline{u_x}(x;y)$ et de concentration moyenne $\overline{c}(x;y)$ en fonction de y pour plusieurs valeurs de $x > 0$.
6. Quel est le signe du flux transverse de concentration $\overline{u_y'c'}$ pour $y > 0$ et pour $y < 0$? Dessiner l'allure du profl de $\overline{u_y'c'}$ en fonction de y pour une valeur de $x > 0$.
7. En déduire le signe de P_c pour $y > 0$ et pour $y < 0$. Dessiner l'allure de $P_c(x;y)$ en fonction de y pour une valeur de $x > 0$.
8. Dessiner enfin l'allure du profil de $k_C(x;y)$.

4 modèle $k-\epsilon$ et couche limite (8 pts)

On considère maintenant une couche limite turbulente complètement développée sur une profondeur H d'eau dans un canal hydraulique de très grande largeur. Cela signifie que cette couche limite a des propriétés invariantes selon x et selon y (directions longitudinales et transverses respectivement). Seule la vitesse moyenne longitudinale $\overline{u}$ est non nulle, présentant un profil selon z, la direction normale au canal.

1. Montrer que compte-tenu de la configuration de l'écoulement, les équations du modèle $k-\epsilon$ se réduisent à :

$$0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{dk}{dz}\right) + P - \epsilon \tag{5}$$

$$0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{d\epsilon}{dz}\right) + C_{\epsilon 1}\frac{P\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k} \tag{6}$$

2. A quoi se réduit le terme de production P dans l'équation pour k (5) ?
3. En rappelant ce qu'est la vitesse de frottement u^*, définir où se situe la loi log et quelle est la forme du profil de vitesse moyen $\overline{u}(z)$ dans cette zone d'existence de la loi log.
4. Montrer que le modèle de longueur de mélange en κz et la définition de la viscosité turbulente ν_t pour le modèle $k-\epsilon$ imposent que :

$$\epsilon = \frac{C_\mu k^2}{u^* \kappa z}$$

5. Pourquoi a-t-on $-\overline{u'w'} = u^{*2}$? Que vaut alors P dans la zone de loi log ?

Des études expérimentales ont montré que dans la zone de la loi log, les termes prépondérants pour l'équation de transport (5) de k sont la production P et la dissipation ϵ, bien supérieurs au terme de diffusion.

6. Déduire de l'équiilibre entre P et ϵ dans la zone de loi log que :

$$u^* = (C_\mu k^2)^{1/4}$$

7. En déduire que ϵ s'exprime en fonction de k sous la forme :

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa z}$$

Pour l'équation de transport de ϵ (6), on doit conserver un équilibre entre le terme diffusif et les deux autres termes.

8. Montrer que les deux termes de droite se comportent comme un terme puits de la forme $-(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})\epsilon^2/k$ qui varie en z^{-2} en supposant que k reste quasi-constant.
9. En équilibrant ce terme avec le terme diffusif pour ϵ (en supposant k quasi constant avec z), montrer que l'on doit avoir :

$$\kappa^2 = \sigma_\epsilon C_\mu^{1/2}(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})$$

10. Calculer κ avec les valeurs usuelles (classique) des paramètres du modèle $k-\epsilon$. Cette valeur vous paraît-elle compatible avec les données expérimentales ?