IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

- Equation de transport de k, l'énergie cinétique turbulente (E_t)

avec $$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \quad et \quad s'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u}_i k) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(\overline{u'_i\, p} - \overline{u'_i\, u'^2_j} + 2\nu\, \overline{u'_i\, s'_{ij}}\right)}_{T_i} \underbrace{- \overline{u'_i\, u'_j}\, S_{ij}}_{P} \underbrace{- 2\nu\, \overline{s'^2_{ij}}}_{-\varepsilon}$$

T_i diffusion ?

P « shear » production

$-\varepsilon$ dissipation

- Modélisation ?

déjà : $$-\overline{u'_i\, u'_j} = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2\nu_t S_{ij}$$

on rajoute : $$\overline{u'_i\, p} - \overline{u'_i\, u'^2_j} \approx \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

et encore : $$\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad et \quad \nu_t \approx k^{1/2}\ell$$

⇨ Modèle algébrique à 1 équation (en k) en se donnant ℓ ! ! !

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

- Equation de transport de ε, la dissipation

  Ça ne rentre pas dans le transparent….
  mais sous forme simplifiée

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T_i^{\varepsilon}\right)+P_\varepsilon-\varepsilon_\varepsilon+\nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i^2}$$

- Modélisation ?

$$T_i^{\varepsilon}\approx\nu_t\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}$$

$$P_\varepsilon\approx-\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\frac{\varepsilon}{k}$$

$$\varepsilon_\varepsilon\approx\frac{\varepsilon^2}{k}$$

En supposant encore une fois $\varepsilon\approx\frac{k^{3/2}}{\ell}$,
et en combinant avec l'équation
en k, on peut écrire :

$$\nu_t\approx k^{1/2}\ell\approx\frac{k^2}{\varepsilon}$$

et aboutir à un modèle algébrique à deux équations de transport (k et ε), le fameux modèle « k –epsilon » !!!

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

- Le modèle avec les valeurs « classiques » de ses paramètres

Equation R.A.N.S. pour $\overline{u_i}$

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

$$\nu_t = c_1 \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i k\right) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{c_2} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i \varepsilon\right) = c_3 \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) \frac{\varepsilon}{k} - c_4 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{c_5} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

c_1=0.09, c_2=1.0, c_3=1.44, c_4=1.92, c_5=1.3 (Spaziale, 1991)
Comment ? Par calage du modèle sur des écoulements de référence

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

- Et les conditions limites ???

Il faut utiliser des « fonctions de paroi » pour avoir des conditions limites compatibles avec ce que l'on sait de la couche limite turbulente…

Si on est dans la sous-couche inertielle, au premier point du maillage on doit avoir :

$$u_1^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y_1^+\right) + 5.0$$

➡ La valeur de vitesse u_1 nous donne u^*

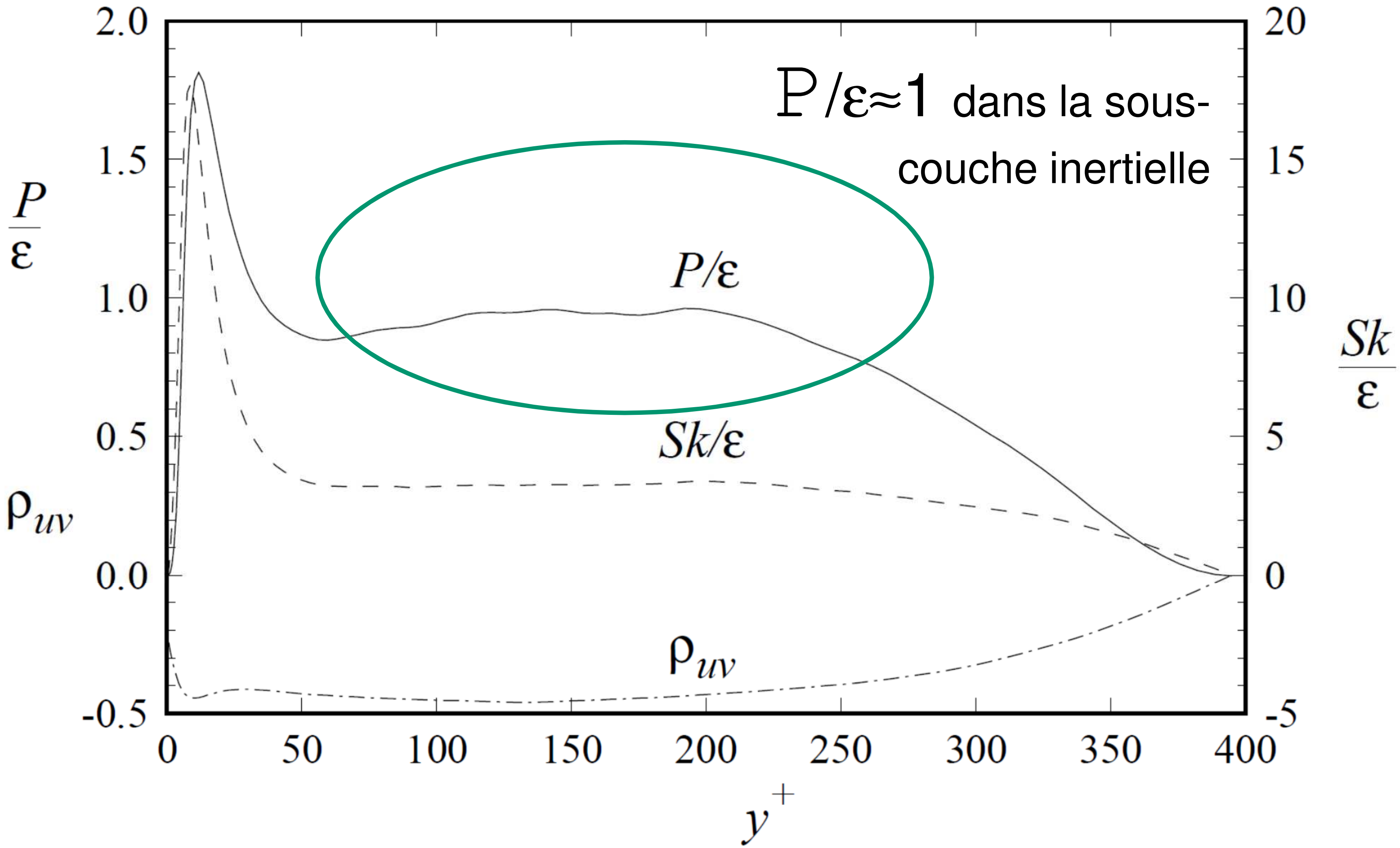
➡ Cette valeur impose k_1

➡ Et comme $P=\varepsilon$ (transparent suivant), on estime ε avec $\varepsilon=u^{*2}/(\kappa y_1)$

Mais, en fonction de la position du premier point de maillage, on a des formulations plus subtiles…

IV- modèles algébriques à 2 équation : k-epsilon…

• retour : couche limite sur fond lisse



- Le modèle k-ω (Wilcox 2008)

Avec ω le taux de dissipation spécifique $\omega = \dfrac{\varepsilon}{\beta^* k}$

Equation R.A.N.S. pour $\overline{u}_i$

$$-\overline{u'_i u'_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \qquad \nu_t = \frac{k}{\omega}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i k\right) = -\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\nu + \sigma^* \nu_t\right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u}_i \omega\right) = \alpha \left(-\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) \frac{\omega}{k} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\nu + \sigma \nu_t\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$$

$$\alpha = \frac{5}{9} \quad \beta = \frac{3}{40} \quad \beta^* = \frac{3}{40} \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad \sigma^* = \frac{1}{2}$$

IV- modèles algébriques à 2 équation : les autres…

- Comment choisir ?

	-	+
k-ε	- décrit mal la proche paroi (→ développement de modèles k-ε à bas Reynolds) - Gère mal les gradients de pression externes, les jets, etc… - Fonctions de paroi très compliquées	- description bonne des écoulements externes autour d'obstacles - a été développé depuis longtemps - converge très rapidement
k-ω	- décrit mal les écoulements loin de la paroi - hautement non-linéaire → faible taux de convergence	- description très bonne en proche paroi (développé pour cela initialement) - Conditions limites sur paroi très simples

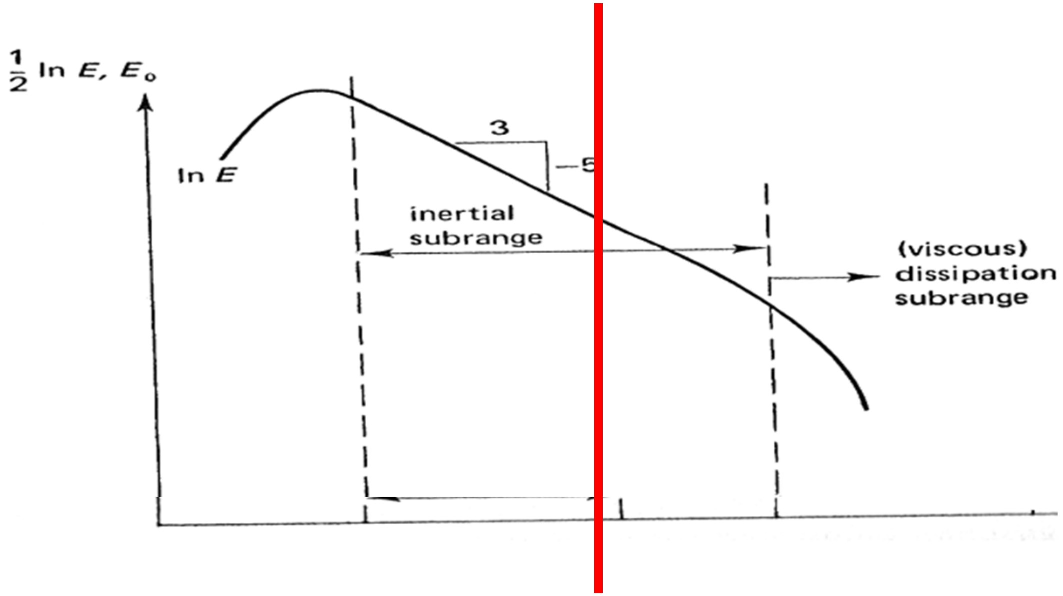
SST
(shear stress transport) ⇒ Combine les deux approches !!!
https://www.cfd-online.com/Wiki/SST_k-omega_model

- Notion de filtre spatial

$$u_i = \overline{u_i} + u_i'$$

champ résolu par le maillage

champ non résolu « sous-grille »



$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

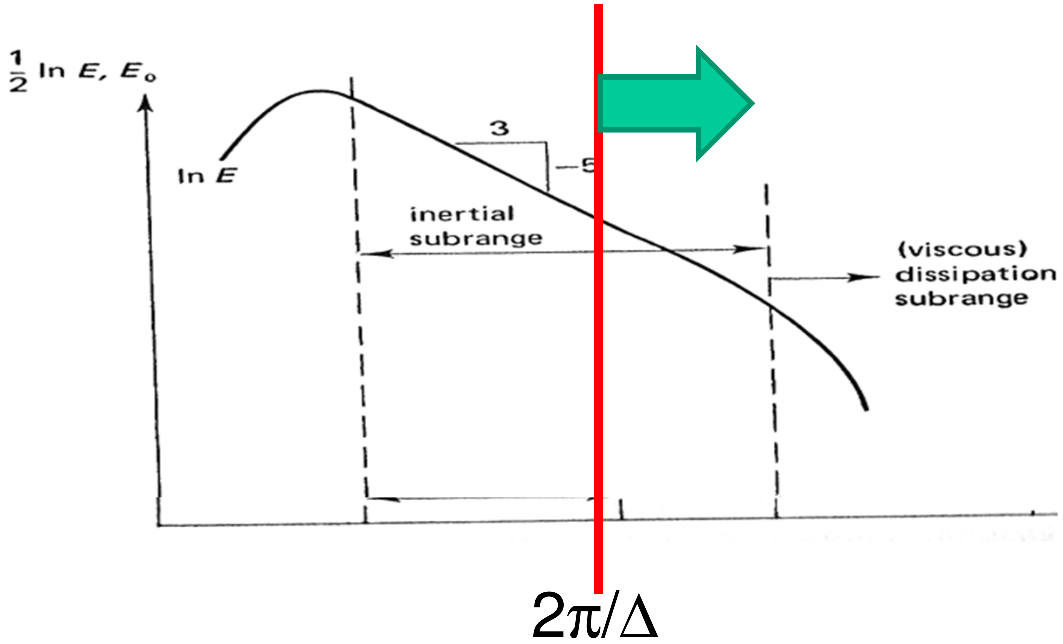
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j}\right)$$

$$-\overline{u_i' u_j'} = -\frac{2}{3}\overline{u_k' u_k'}\delta_{ij} + 2\nu_t S_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$$

• Comment prescrire la viscosité turbulente pour garantir la bonne dissipation ?

$$\Delta = (volume)^{1/3} = \Delta x$$



Smagorinsky model : $\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left|\overline{S}\right|$ où $\overline{S} = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$

avec $C_s \sim 0.1\text{-}0.2$