

Examen de M2 pro « Turbulence »

24 novembre 2013, M2 pro, 1er semestre 2013-2014

Conditions de l'examen :

- Documents et matériel autorisés : tous documents de cours et TD, calculatrice, règle.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.
- Présentation : une pénalité (jusqu'à 1 point) sera appliquée aux copies illisibles ou mal rédigées.

1 Turbulence en décroissance et modèle $k - \epsilon$

1. Montrer que pour une turbulence homogène isotrope (c'est-à-dire, dont les propriétés ne dépendent plus de l'espace), les équations pour l'énergie cinétique k et la dissipation ϵ du modèle $k - \epsilon$ se réduisent à :

$$\frac{dk}{dt} = P - \epsilon \quad (1)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = C_{\epsilon 1} \frac{P\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2)$$

vous rappellerez ce que représente P dans ce système d'équations.

2. Montrer que pour une turbulence homogène isotrope en décroissance, c'est-à-dire sans forçage extérieure pour la maintenir, la variation d'énergie cinétique turbulente k est donnée par :

$$\frac{d^2k}{dt^2} = C_{\epsilon 2} \frac{1}{k} \left(\frac{dk}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

3. Rechercher une solution à ce problème sous la forme d'une loi de puissance $k(t) = At^{-n}$ et montrer que n et $C_{\epsilon 2}$ sont reliés par la formule :

$$C_{\epsilon 2} = 1 + \frac{1}{n} \quad (4)$$

Pour étudier expérimentalement une turbulence homogène isotrope en décroissance, on génère en soufflerie ou en canal hydraulique un écoulement à haut Reynolds avec une vitesse moyenne U_0 à travers une grille fixe, de maille de taille M (voir figure1(a)). A une distance x en aval de la grille, la turbulence mesurée correspond à une turbulence qui aurait subi une décroissance sans forçage pendant $t = x/U_0$ depuis sa génération au niveau de la grille (bref de la turbulence homogène devenue isotrope en décroissance!).

4. Des mesures expérimentales de ce type de décroissance sont présentées dans la figure 1(b) en échelles log-log. Déterminer la pente des droites de décroissance de l'énergie cinétique dans ces expériences.
5. En déduire une valeur expérimentale pour n .
6. Quelle valeur de $C_{\epsilon 2}$ faut-il choisir pour retrouver ce résultat avec un modèle $k - \epsilon$? Est-ce une valeur standard? Si non, pourquoi?
7. Trouver la loi de puissance pour ϵ .
8. En estimant l'échelle intégrale L_{int} à partir de k et ϵ , montrer qu'elle vérifie une loi de puissance $L_{int} \approx t^m$ avec $m = 1 - (n/2)$. La taille de tourbillons apparents dans un champ de vitesse va-t-elle croître ou décroître?

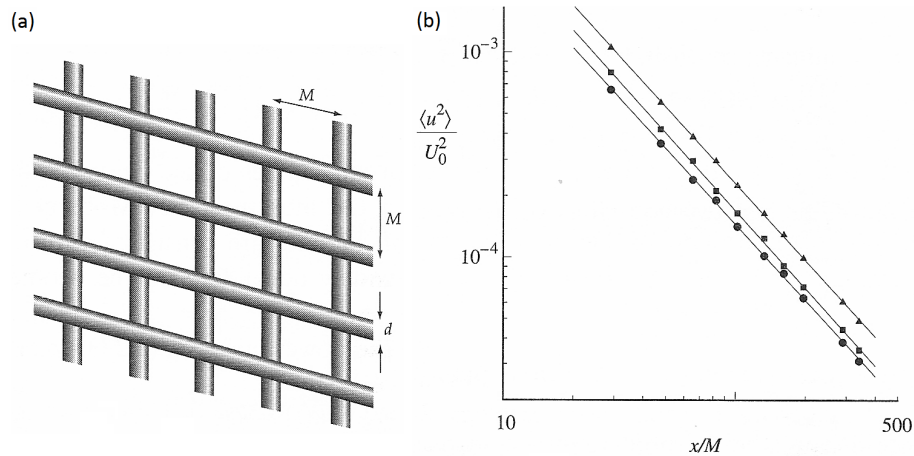


FIGURE 1 – (a) schéma de la grille de maille M utilisée pour générer une turbulence homogène isotrope en décroissance et (b) mesures d'énergie cinétique k à différentes distances x en aval de la grille pour un écoulement incident de vitesse U_0 . figures tirées de « Turbulent flows » de S.B. Pope (2000).

2 Écoulement turbulent « hydrauliquement lisse » dans une conduite cylindrique

On s'intéresse ici à la modélisation d'une couche limite turbulente pour une conduite en charge de forme cylindrique de rayon R . On choisit une représentation cylindrique (x, r, θ) où x est la coordonnée axiale coïncidant avec la direction de l'écoulement, r la coordonnée radiale et θ la coordonnée angulaire (voir figure 2).

On s'intéresse à la partie établie stationnaire, loin de l'entrée. On note u_x la composante de la vitesse dans la direction longitudinale, u_r la composante dans la direction radiale et u_θ celle dans la direction azimutale.

1. En simplifiant les équations RANS en cylindrique données en annexe pour le problème

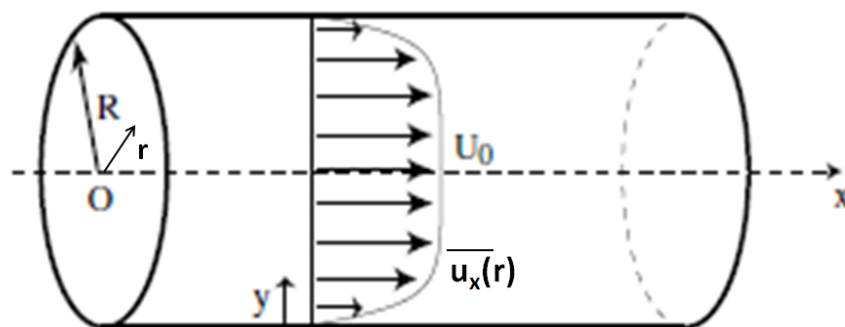


FIGURE 2 – Écoulement et repérage cylindrique pour l'écoulement en conduite. La coordonnée y est la coordonnée normale à la paroi introduite dans l'énoncé du problème

considéré ici, montrer que la composante u_x satisfait l'équation :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\nu \frac{d\bar{u}_x}{dr} - \overline{u'_x u'_r} \right) \right] = K \quad (5)$$

où ν est la viscosité cinématique et K est une constante reliée au gradient de pression le long du cylindre, $K = (1/\rho)(d\bar{p}/dx)$. Quel est le signe de K pour un écoulement vers la droite ($\bar{u}_x > 0$) ?

- Retrouver ce résultat en considérant un petit cylindre de contrôle de rayon r et d'axe $(0x)$, de face avant localisée en x et de face arrière localisée en $x+dx$: en faisant le bilan des forces s'exerçant sur les surfaces, montrer que l'écoulement satisfait l'équation :

$$\nu \frac{d\bar{u}_x}{dr} - \overline{u'_x u'_r} = \frac{r}{2} K \quad (6)$$

et vérifier que cette équation est bien celle obtenue en intégrant l'équation (5).

- Pour la modélisation du tenseur de Reynolds, on utilise un modèle de longueur de mélange avec le profil suivant (issu de mesures expérimentales) :

$$l_m(r) = \frac{\kappa R}{3} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right)$$

où $\kappa = 0.41$ est la constante de Karman. Comment s'exprime alors le tenseur de Reynolds $-\overline{u'_x u'_r}$?

- En introduisant la coordonnée pariétale y telle que $r = R - y$ (cf figure 2) et en procédant à un développement limité en y/R , déterminer ce que vaut l_m au voisinage de $y = 0$ (càd $r = R$). Que pouvez-vous dire de la structure de la couche limite turbulente proche de $y = 0$? Comment doit alors s'écrire le profil de \bar{u}_x en fonction de y , au voisinage de $y \rightarrow 0$?
- En définissant et introduisant la coordonnée réduite pour la couche limite turbulente (notée y^+ en cours), quelle est la contribution du tenseur visqueux et du tenseur de Reynolds dans la contrainte totale en fonction des valeurs de y^+ ?
- En supposant que dans l'essentiel de la conduite, seul le tenseur de Reynolds importe, et en négligeant donc le tenseur visqueux, montrer que le profil de vitesse longitudinale moyenne \bar{u}_x satisfait l'équation :

$$\frac{d\bar{u}_x}{dr} = -\frac{3}{\kappa} \sqrt{\frac{-K}{2R}} \frac{\sqrt{r/R}}{1 - (r/R)^3} \quad (7)$$

- Montrer que le profil de vitesse s'écrit alors :

$$\bar{u}_x(r) = U_{max} - \sqrt{\frac{-KR}{2}} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1 + (r/R)^{3/2}}{1 - (r/R)^{3/2}} \quad (8)$$

où U_{max} est la vitesse au centre de la conduite (en $r = 0$).

formule : on donne la primitive

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3} dx = \frac{2}{3} \operatorname{th}^{-1}(x^{3/2}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x^{3/2}}{1-x^{3/2}} \right)$$

8. En retrouvant la relation liant u^* , la vitesse de frottement, à K et en procédant au développement limité pour $r/R \rightarrow 0$, comparer le comportement de ce profil de vitesse dans la zone centrale avec la formule empirique proposée par Darcy en 1855 :

$$\frac{U_{max} - \bar{u}_x}{u^*} = 5.08 \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \quad (9)$$

9. Au voisinage de $r/R \rightarrow 1$, que prédit l'équation (8) ? Quelle hypothèse n'est plus valable ? Comment raccorder avec la condition de vitesse nulle en $r/R = 1$?
10. Au moyen de la formule approchée (9), et en supposant qu'elle approxime bien l'écoulement dans la majeure partie de la conduite, calculer la vitesse moyenne U_{moy} dans la conduite et déterminer l'équation donnant le coefficient de frottement de Darcy-Weisbach $f = 8(u^{*2}/U_{moy}^2)$ (Utilisé pour prédire les pertes de charge régulières en conduite).

ANNEXE

Equations RANS en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\bar{u}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} - \frac{\bar{u}_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_r'^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta' \bar{u}_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x' \bar{u}_r'}{\partial x} + \frac{1}{r} (\bar{u}_r'^2 - \bar{u}_\theta'^2) \right] \\ \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial x} + \frac{\bar{u}_\theta \bar{u}_r}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_\theta' \bar{u}_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta'^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x' \bar{u}_\theta'}{\partial x} + \frac{2}{r} \bar{u}_r' \bar{u}_\theta' \right] \\ \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \theta} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_x' \bar{u}_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x' \bar{u}_\theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x'^2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$