

Examen du module SUE21 « *Turbulence* »

5 décembre 2011, M2 pro, 1er semestre 2011-2012

Conditions de l'examen :

- Documents autorisés : tous les documents de cours / TD (polycopiés et notes manuscrites).
- Durée de l'épreuve : 2 heures.
- Présentation : une pénalité sera appliquée aux copies illisibles ou mal rédigées.

1 Question de cours

Rappeler les hypothèses de Kolmogorov et redémontrer la forme du spectre pour la densité spectrale d'énergie cinétique turbulente dans la partie universelle. Tracer ce spectre et préciser les différentes régions.

2 Analyse de données expérimentales et grandeurs caractérisant la turbulence

On réalise des mesures de vitesse longitudinale dans une rivière au moyen d'un ADV (Vélocimétrie Doppler Acoustique) avec une fréquence d'acquisition $f=50$ Hz, et on obtient la série temporelle de mesures tracée dans la figure 1.

1. La valeur moyenne \bar{u} et la rms u_{rms} de ce signal sont données dans la figure. Comment sont définies et calculées ces valeurs ?
2. On utilise cette série temporelle $u(t)$ pour calculer ensuite la fonction d'autocorrélation temporelle $R_{u'u'}(\tau)$ du signal tracée dans la figure 2. Comment est-elle calculée à partir de la série temporelle et à quoi correspond physiquement le temps intégral T_{int} donné dans la figure ? En déduire l'échelle intégrale spatiale de la turbulence L_{int} en supposant que les structures turbulentes n'évoluent quasiment pas lorsqu'elles traversent la zone de mesure avec la vitesse d'advection \bar{u} (hypothèse dite de la « turbulence gelée »).
3. En faisant l'hypothèse d'une turbulence homogène isotrope, estimer l'énergie cinétique turbulente k_{turb} ainsi que le taux de dissipation ϵ de cette turbulence. En déduire les échelles de temps et longueur de Kolmogorov τ_η et l_η .
4. la taille de la zone de mesure de l'ADV est d'environ $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$. La fréquence d'acquisition est de 50 Hz. Ces conditions de mesure permettent-elles de mesurer correctement la turbulence ?

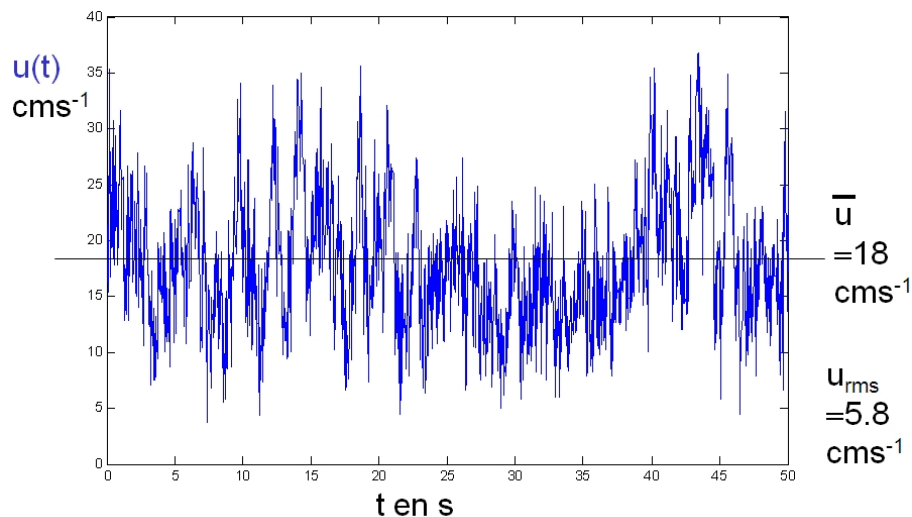


FIGURE 1 – Signal temporel acquis en rivière avec un vélocimètre ADV pour la composante longitudinale u du courant.

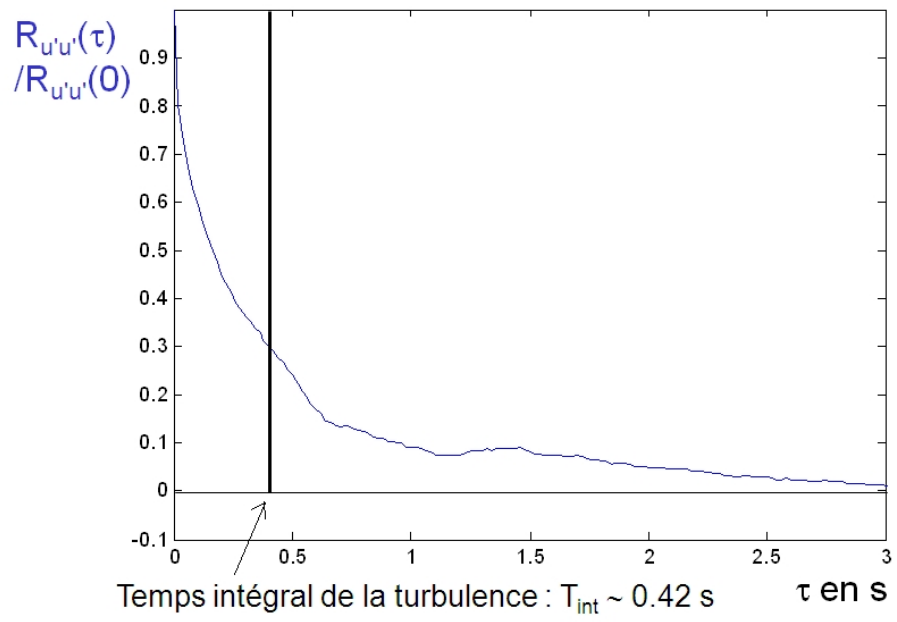


FIGURE 2 – fonction d’auto-corrélation calculée à partir du signal temporel de la figure 1.

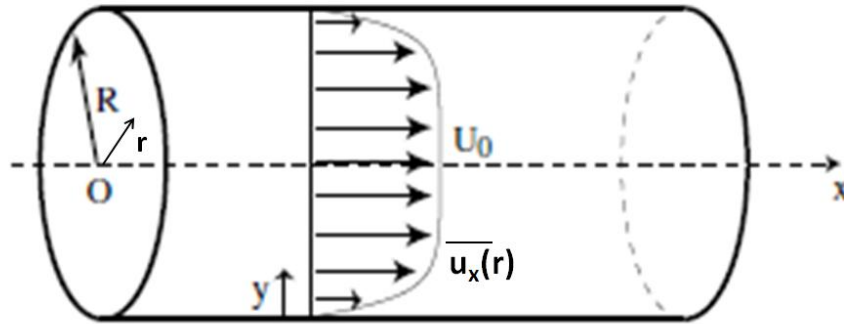


FIGURE 3 – Écoulement et repérage cylindrique pour l'écoulement en conduite. La coordonnée y est la coordonnée normale à la paroi introduite dans l'énoncé du problème

3 Couche limite turbulente dans une conduite cylindrique

On s'intéresse ici à la modélisation d'une couche limite turbulente pour une conduite en charge de forme cylindrique de rayon R . On choisit une représentation cylindrique (x, r, θ) où x est la coordonnée axiale coïncidant avec la direction de l'écoulement, r la coordonnée radiale et θ la coordonnée angulaire (voir figure 3).

3.1 longueur d'établissement

On s'intéresse à la croissance de la couche limite à partir d'une entrée avec un profil de vitesse uniforme de vitesse U_0 .

1. Comment va croître la couche limite pariétale en régime laminaire ?
2. A quelle distance se produira la transition vers la turbulence ?
3. Comment se poursuivra la croissance de la couche limite ?
4. En négligeant la courbure (approximation cartésienne) et en supposant que la croissance de la couche limite cesse lorsque son épaisseur atteint R , donnez les équations permettant d'estimer la longueur L nécessaire au développement de cette couche et permettant d'atteindre le régime stationnaire établi.
5. Donner les formules permettant de calculer L dans le cas où la couche limite reste totalement laminaire ou dans le cas où elle est turbulente très rapidement et se développe essentiellement dans ce régime

Rappels : Loi de croissance d'une couche limite laminaire, théorie de Blasius : $\delta(x)/x = 5Re_x^{-1/2}$.
 Loi de croissance d'une couche limite turbulente, méthode intégrale : $\delta(x)/x = 0.37Re_x^{-1/5}$.
 Transition laminaire - turbulence : $Re_x = 100000$.

3.2 structure de la couche limite dans la partie établie

On s'intéresse maintenant à la partie établie stationnaire, loin de l'entrée. On note u_x la composante de la vitesse dans la direction longitudinale, u_r la composante dans la direction radiale et u_θ celle dans la direction azimutale.

1. En simplifiant les équations RANS en cylindrique données en annexe pour le problème considéré ici, montrer que la composante u_x satisfait l'équation :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\nu \frac{d\bar{u}_x}{dr} - \overline{u'_x u'_r} \right) \right] = K \quad (1)$$

où ν est la viscosité cinématique et K est une constante reliée au gradient de pression le long du cylindre, $K = (1/\rho)(d\bar{p}/dx)$.

2. Retrouver ce résultat en considérant un petit cylindre de contrôle de rayon r et d'axe $(0x)$, de face avant localisée en x et de face arrière localisée en $x+dx$. En faisant le bilan des forces s'exerçant sur les surfaces, montrer que l'écoulement satisfait l'équation :

$$\nu \frac{d\bar{u}_x}{dr} - \overline{u'_x u'_r} = \frac{r}{2} K \quad (2)$$

3. Pour la modélisation du tenseur de Reynolds, on utilise un modèle de longueur de mélange avec le profil suivant (issu de mesures expérimentales) :

$$l_m(r) = \frac{\kappa R}{3} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right)$$

où $\kappa = 0.41$ est la constante de Karman.

Comment s'exprime alors le tenseur de Reynolds $-\overline{u'_x u'_r}$?

4. En introduisant la coordonnée pariétale y telle que $r = R - y$ (cf figure 3) et en procédant à un développement limité en y/R , déterminer ce que vaut l_m au voisinage de $y = 0$ (càd $r=R$). Que pouvez-vous dire de la structure de la couche limite turbulente proche de $y = 0$?
5. En définissant et introduisant la coordonnée réduite pour la couche limite turbulente (notée y^+ en cours), quelle est la contribution du tenseur visqueux et du tenseur de Reynolds dans la contrainte totale en fonction des valeurs de y^+ ?
6. En supposant que dans l'essentiel de la conduite, seul le tenseur de Reynolds importe, et en négligeant donc le tenseur visqueux, montrer que le profil de vitesse longitudinale moyenne \bar{u}_x satisfait l'équation :

$$\frac{d\bar{u}_x}{dr} = 3 \sqrt{\frac{K}{R} \frac{1}{\kappa} \frac{\sqrt{r/R}}{1 - (r/R)^3}} \quad (3)$$

7. Montrer que le profil de vitesse s'écrit alors :

$$\bar{u}_x(r) = U_{max} + 3 \sqrt{\frac{K}{R} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{2}} \ln \frac{1 + (x/R)^{3/2}}{1 - (x/R)^{3/2}} \quad (4)$$

où U_{max} est la vitesse au centre de la conduite (en $r = 0$).

formule : on donne la primitive

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 - x^3} dx = \frac{2}{3} \operatorname{th}^{-1}(x^{3/2}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x^{3/2}}{1 - x^{3/2}}$$

8. En retrouvant la relation liant u^* , la vitesse de frottement, à K et en procédant au développement limité pour $r/R \rightarrow 0$, comparer le comportement de ce profil de vitesse dans la zone centrale avec la formule empirique proposée par Darcy en 1855 :

$$\frac{U_{max} - \bar{u}_x}{u^*} = 5.08 \left(\frac{r}{R} \right)^{3/2} \quad (5)$$

9. Au voisinage de $r/R \rightarrow 1$, que prédit l'équation (4) ? Quelle hypothèse n'est plus valable ? Comment raccorder avec la condition de vitesse nulle en $r/R = 1$?
10. Au moyen de la formule approchée (5), en supposant qu'elle approxime suffisamment bien l'écoulement dans la majeure partie de la conduite, calculer la vitesse moyenne U_{moy} dans la conduite, et déterminer alors l'équation donnant le coefficient de frottement de Darcy-Weisbach $f = 8(u^{*2}/U_{moy}^2)$. Commenter.

ANNEXE : équations RANS en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\bar{u}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_x}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} - \frac{\bar{u}_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_r'^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta' u_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x' u_r'}{\partial x} + \frac{1}{r} (\bar{u}_r'^2 - \bar{u}_\theta'^2) \right] \\ \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_x}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial x} + \frac{\bar{u}_\theta \bar{u}_r}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_\theta' u_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta'^2}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x' u_\theta'}{\partial x} + \frac{2}{r} \bar{u}_r' u_\theta' \right] \\ \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_x}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ &+ \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right] \\ &- \left[\frac{\partial \bar{u}_x' u_r'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_x' u_\theta'}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{u}_x'^2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$