Examen du module SUE21 « Turbulence » 14 décembre 2010

I Questions de cours

1) Donner l'interprétation physique du concept de viscosité de Boussinesq et de la longueur de mélange de Prandtl (vous pouvez vous aidez d'une équation et/ou d'un schéma).
2) A quoi correspondent un modèle algébrique de turbulence à 0 équation, un modèle à 1 équation et un modèle à deux équations ?

II Couche limite turbulente en canal

On s'intéresse ici à la modélisation d'une couche limite turbulente pour une conduite en charge, en simplifiant le problème en cartésien et en considérant le problème de la couche limite turbulente pour une conduite en section rectangulaire de largeur B et hauteur 2H, dans lequel on fait passer un écoulement en charge de débit Q imposé. On cherche *in fine* à déterminer le coefficient de perte de charge linéaire λ associé à cet écoulement.

On utilise comme repère x dans le sens de l'écoulement, y dans la direction transverse (sens de la largeur) et z dans la direction de la hauteur de la conduite. On prend pour origine la surface inférieure pour z, et le centre du canal pour y=0 (voir schéma au tableau).

a) Faire un schéma de l'écoulement et du profil de vitesse attendu dans le cas où B>>2H.

b) On se place justement dans ce dernier cas, et on suppose donc que la dynamique est totalement contrôlée par les couches limites verticales qui se développent à partir des faces inférieures et supérieures. Pourquoi peut-on considérer que la couche limite verticale qui se développe sur la face inférieure s'arrête de croître à z=H ? Que se passe-t-il entre z=H et z=2H ?

c) En supposant que le régime est établi (invariance selon x), statistiquement stationnaire, sans écoulements secondaires ($\underline{v}=0$, $\underline{w}=0$), et indépendant de y, écrire et surtout simplifier les équations RANS.

d) En déduire que le gradient de pression totale selon x ($d\underline{P}_{tot}/dx$) est une constante, et que la contrainte totale (tenseur de Reynolds et tenseur visqueux) doit se mettre sous la forme $\tau_{tot}=\tau_0+(\partial\underline{P}_{tot}/\partial x)z$, où τ_0 est la contrainte pariétale en z=0.

e) Du fait de la symétrie par rapport à z=H, montrer que nécessairement, $(\partial\underline{P}_{tot}/\partial x)=-\tau_0/H$.

Dans la suite, on introduit la vitesse de frottement u* définie à partir de la contrainte pariétale par la formule $\tau_0=\rho u^{*2}$. On modélise également le tenseur de Reynolds au moyen d'une longueur de mélange qui satisfait $l_m=\kappa z$ avec $\kappa=0.4$ pour y petit (jusqu'à ce que $l_m=0.085H$), puis $l_m=0.085H$ ensuite. On exprimera donc la viscosité turbulente sous la forme $\nu_T=u'l'$ avec $l'=l_m$ et $u'=l_m(d\underline{u}/dz)$

f) Dessiner l'allure de la longueur de mélange $l_m(z)$. Quelle propriété liée aux tourbillons de la turbulence traduit la croissance linéaire avec z ?

g) En reprenant l'équation RANS selon x et en exprimant $(\partial\underline{P}_{tot}/\partial x)$ avec u*, montrer que la vitesse longitudinale vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1-z/H)u^{*2}=l_m^2(d\underline{u}/dz)^2+\nu(d\underline{u}/dz)$$

h) Pour z assez petit devant H, on considère le terme de gauche comme constant $(1-z/H)u^{*2}\approx u^{*2}$ et qu'on est dans la zone où $l_m=\kappa z$. En adimensionnant $\underline{u}$ avec u* et z avec une échelle de longueur basée sur u* et ν que l'on définira et notera L_ν, montrer que l'équation devient :

$1=(du^+/dz^+)+\kappa^2 z^{+2}(du^+/dz^+)^2$ où $u^+=u/u^*$ et $z^+=z/L_\nu$

i) Retrouver que pour $z^+\to 0$, l'équation admet une solution asymptotique de la forme $u^+=z^+$. Comment s'appelle cette zone ?

j) Retrouver que lorsque z+ croît et que le tenseur de Reynolds prédomine, l'équation admet une autre solution asymptotique sous la forme

$u^+=(1/\kappa)\ln(z^+)+A$, où A est une constante d'intégration

Pour des nombres de Reynolds assez élevés, on considère généralement que la résolution complète du problème donne un profil de vitesse longitudinale moyenne $\underline{u}(z)$ assez bien représenté par la loi de la question précédente avec A=5.5 appliquée à toute la moitié du canal (entre $z^+=1$ et z=H), l'autre moitié étant obtenue par symétrie.

k) en revenant dans l'espace réel (dimensionnel) et en intégrant cette loi (on rappelle que la primitive de ln(x) est xln(x)-x) entre $z^+=1$ et z=H, montrer que la vitesse moyenne dans la conduite ($U_{bulk=}Q/2BH$) vérifie :

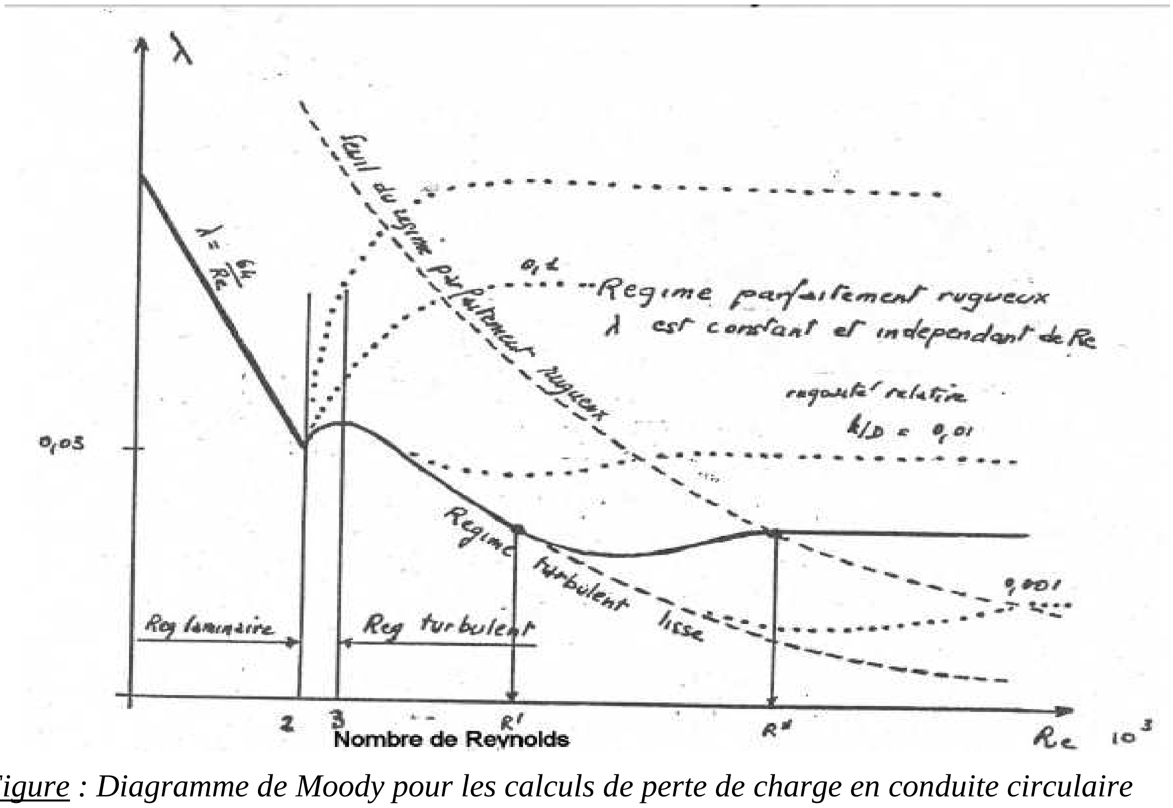
$$U_{bulk}=(u^*/\kappa)\,(\ln(Hu^*/\nu)-1)$$

l) on rappelle que le coefficient de perte de charge linéaire est défini par $\lambda=-(dP/dx)/((1/2)\rho U_{bulk}{}^2/H)$. Montrer qu'ici, $\lambda=u^{*2}/U_{bulk}{}^2$ et que λ vérifie l'équation

$$1/\sqrt{\lambda}= (1/\kappa)\,(\ln(R_e\lambda)-1)$$

où le Reynolds de conduite est défini ici par $R_e=U_{bulk}H/\nu$

m) on rappelle que pour la conduite circulaire, on trouve $1/\sqrt{\lambda}= 2\log(R_e\lambda)-0.8$ pour l'équation donnant le régime hydrauliquement lisse dans le diagramme de Moody (cf figure). Qu'en pensez-vous ?



<u>Figure</u> : Diagramme de Moody pour les calculs de perte de charge en conduite circulaire