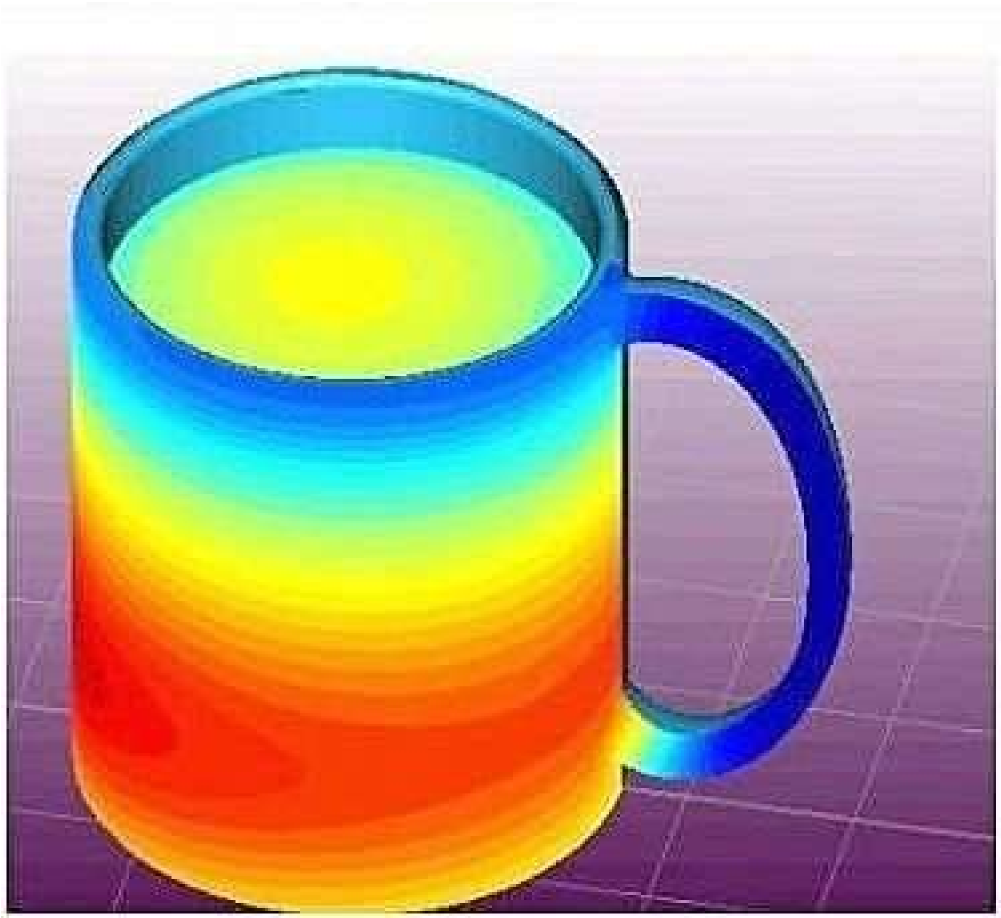
Cahier de Travaux dirigés du module « Transferts thermiques », partie CONDUCTION

Licence Mécanique et Applications 3ème année, parcours « mécanique »



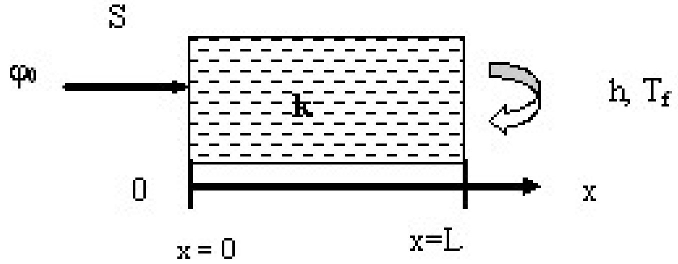
2015-2016

Equipe pédagogique (ordre alphabétique) :
Abdelkader MOJTABI, Frédéric MOULIN, Sébastien TANGUY

TD n°1 : Conduction thermique monodimensionnelle en régime stationnaire

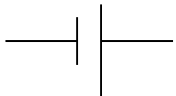
Partie A : Conduction stationnaire 1D en cartésien et analogie électrique

Soit un mur d'épaisseur L, de surface S, en contact sur la face x = L avec un fluide à température T_f (le coefficient d'échange par convection est noté h). Ce mur est soumis sur la face x = 0 au rayonnement solaire et le vecteur densité de flux est noté $\vec{\varphi}_0 = \varphi_0 \vec{e}_x$. La conductivité thermique est notée k, et il n' y a pas de production de chaleur dans le mur.

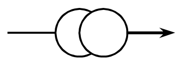


1°) Exprimer le problème mathématique et préciser l'écriture des deux conditions aux limites.
2°) Déterminer analytiquement la distribution de température dans le mur en fonction de φ_0, T_f, L, h et k. Exprimer T(0) et T(L).

3°) Rappeler les bases de l'analogie électrique :
a) Quelle est la grandeur thermique analogue d'une tension, d'une courant et d'une résistance électrique.
b) Que représentent en terme de conditions aux limites sur la température les deux schémas électrique suivants :



Générateur de tension



Générateur de courant

4°) Dessiner le schéma électrique équivalent à notre problème en précisant les résistances électriques et les températures aux nœuds. En déduire trois expressions du flux de chaleur ϕ_0 traversant le mur.

5°) Faire apparaître dans l'expression T(x) de la question 2 le groupement $\beta = \frac{hL}{k}$. Donner les unités physiques de h, k et β. Discuter sur la valeur de la température T(L) lorsque $\beta \to 0$ et $\beta \to \infty$.

6°) <u>Application numérique :</u>
L = 10 cm, h = 10, k = 5, φ_0 =1000 et T_f =300K. Calculer β, T(0) et T(L).

Partie B : Géométrie cylindrique

1°) Ecrire l'équation aux dérivées partielles régissant la propagation de la chaleur dans un tube cylindrique de longueur L et de rayons intérieur R_i et extérieur R_e. Le milieu est supposé homogène, isotrope et de conductivité thermique k. Les températures T_i et T_e des parois intérieure et extérieure sont imposées et le transfert de chaleur est supposé purement radial (L>>R_i et R_e).
a) Calculer la répartition de température à l'intérieur du tube.
b) Déterminer l'expression du flux de chaleur.
c) En utilisant le concept de résistance thermique et le résultat précédent, calculer l'expression du flux de chaleur traversant une structure cylindrique formée de 3 couches A, B, C de rayons R_1, R_2, R_3, R_4, ceci en fonction de l'écart total de température T_1-T_4.

2°) Dans le calcul précédent, il n'a pas été tenu compte des échanges par convection forcée au niveau de la surface extérieure (coefficient h_i) et de la surface extérieure (coefficient h_e) ; le fluide étant maintenu aux températures T_{fi} et T_{fe} au loin de ces deux surfaces.

a) Calculer le flux de chaleur.
b) Représenter le schéma analogique électrique équivalent.

3°) Une tasse en porcelaine (k=1,00 W/m/°C) de rayon intérieur R_i=0,02 m contient du café à T_{fi}=80 °C. La température ambiante extérieure est T_{fe}=20 °C. Le coefficient de convection extérieure est h_e=25 W/m²/°C. On suppose une symétrie cylindrique sur la paroi latérale.
a) Déterminer l'épaisseur de la paroi de la tasse pour que la température T_e de la surface extérieure soit au maximum égale à 40 °C, en supposant la convection intérieure infiniment grande pour que $T_{fi}=T_{pi}$.
b) La convection interne n'est plus infinie, on prend h_i=100W/m²/°C. Ecrire le système à résoudre. Résolution numérique : calculer R_e et T_{pi}.

4°) Epaisseur critique d'isolation
On installe une couche uniforme de matériau isolant (conductivité k) sur un corps cylindrique de rayon R_i. Le rayon externe de la couche d'isolant est notée R_e. La température intérieure est fixée à T_i et la surface extérieure est soumise à un environnement convectif à température T_{fe} et de coefficient h.
a) En utilisant le réseau des résistances thermiques équivalents, évaluer l'expression du transfert de chaleur en fonction des paramètres du problème.
b) Quelle est la valeur critique du rayon externe R_{ec} pour laquelle cette expression est maximale.
c) Discuter ce problème d'isolation en fonction des rayons R_e, R_i et R_{ec}.

Partie C : Géométrie sphérique

1°) Soit une sphère creuse de rayons extérieur et intérieur R_e et R_i, dont on fixe les températures respectives à T_e et T_i.
a) Déterminer la répartition de température dans la sphère.
b) Calculer le flux thermique et la résistance thermique équivalente.
c) En désignant par h_i et h_e les coefficients d'échange par convection, calculer l'expression du flux thermique en fonction de T_{fi} et T_{fe}, les températures des fluides en contact avec la sphère à l'intérieur et à l'extérieur.

2°) On considère un réservoir sphérique de rayon interne R_i contenant de l'oxygène liquide à une température T_0=90 K. La température de l'air ambiant est T_{fe}=15 K. Soient h_i le coefficient de transfert par convection entre l'oxygène et la surface interne du réservoir et h_e le coefficient de transfert par convection entre l'air ambiant et la paroi extérieure du réservoir. La paroi du réservoir, de rayon externe R_e, est constituée d'un matériau isolant dont la conductivité k varie avec la température selon la loi :

$$k = f(T) = \frac{1}{a - bT}$$

où a et b sont des constantes positives, supposées connues, et **T est exprimée en °K**.
Pour l'étude du transfert de chaleur à travers la paroi annulaire isolante, on suppose que :
- les surfaces interne et externe de la paroi sont isothermes et maintenues respectivement aux températures T_i et T_e qui demeurent constantes dans le temps.
- la conduction thermique dans la paroi est unidimensionnelle, en régime permanent, et régie par la loi :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(k(T)\, r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

a) Déterminer la solution du problème T(r) en tenant compte des conditions aux limites pré-citées (T_i et T_e).
b) En déduire l'expression de la puissance thermique totale $\dot{Q}_T$ traversant la paroi annulaire en fonction de T_i et T_e ; en précisant le sens du flux thermique dans le cas où $T_e>T_i$.
c) Si l'on s'intéresse uniquement au cas asymptotique pour lequel :

$$\varepsilon = \frac{bT}{a} << 1 \text{ pour T telle que } T_i \le T \le T_e,$$

Déterminer l'expression simplifiée de $\dot{Q}_T$ en fonction de T_i et T_e. En déduire la relation exprimant $\dot{Q}_T$ en fonction de T_0 et T_{fe}.

TD n° 2 : Conduction thermique avec sources internes en régime stationnaire

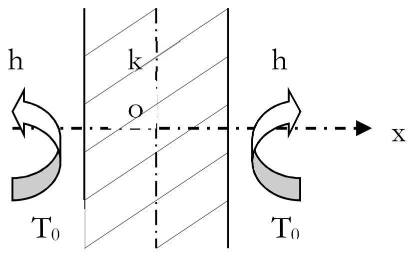
Exercice 1 :

Soit une plaque plane d'épaisseur L, de températures de surface T_1 et T_2, soumise sur la face chaude (T_1) à un flux de rayonnement micro-ondes conduisant par absorption à une production interne de chaleur sous la forme : $P(x) = P_o\exp(-mx)$; P_o étant la valeur en surface, à x=0.

a) calculer la répartition de température dans le matériau de conductivité k.
b) pour quelle valeur x_m de x cette température est elle maximale.
c) évaluer la puissance engendrée par le rayonnement et vérifier qu'elle est égale à la somme algébrique des deux flux entrant et sortant par les faces 1 et 2.

Exercice 2 :

On considère un mur infini suivant les directions y et z et d'épaisseur 2L suivant x. La température T est supposée ne dépendre que de x. La conductivité thermique homogène est notée k et les deux faces échangent de la chaleur par convection (coefficient h) avec un fluide à température uniforme T_0.



L'origine des x est placée dans le plan médian du mur. On suppose que les sources internes de chaleur sont régies par l'expression de la puissance volumique suivante :

$P(x) = a[1 + \beta(T(x) - T_0)]$

où a et β sont des constants réelles.

Cela peut représenter la puissance dégagée par une réaction dont l'efficacité augmente avec la température.

a) Ecrire l'équation différentielle décrivant le problème en régime permanent ainsi que le jeu de conditions aux limites. L'une des conditions aux limites pourra prendre en compte la symétrie du problème.

b) Après intégration écrire les lois de distribution des températures T(x) en fonction du signe du groupement $s = \dfrac{a\beta}{k}$.

c) Etablir les lois de distribution des températures suivant que :
- $a = 0$
- $\beta = 0$ et $a \neq 0$
- $a\beta > 0$. Expliquer physiquement le comportement singulier de cette dernière solution.

On se place dans ce dernier cas pour les questions d) et e).

d) Que se passe-t-il lorsque le coefficient d'échange h devient infini. Ecrire la solution T(x) correspondante.

e) Calculer alors le flux de chaleur par unité de surface dissipé sur chacune des faces et vérifier globalement la cohérence du résultat.

Exercice 3 :

Soit un cylindre de rayon R=1 cm représentant une ligne électrique, destinée à transporter sous haute tension un courant I de 1000 A. Sachant que la résistance électrique de la ligne est ρ_0=0.06 Ωkm^{-1}, que l'air ambiant est à 30°C et que le coefficient d'échange global avec l'extérieur est H=18 $Wm^{-2}K^{-1}$,

a) calculer la valeur de la source interne volumique de chaleur P.
b) évaluer la distribution de température dans le conducteur électrique en cuivre

($k = 400\ Wm^{-1}K^{-1}$) ; ainsi que la température de surface de la ligne.

c) dans une section droite du câble électrique, quel est le rayon où la température est maximale ?

Exercice 4 :

L'ensemble combustible d'un réacteur nucléaire est représenté par une sphère de rayon R de matière fissile, entourée d'une couche sphérique de revêtement de rayon extérieur R_o.
La température extérieure du fluide réfrigérant dans lequel baigne l'ensemble est T_e, et le coefficient d'échange correspondant de convection est h_e.
La puissance volumique générée dans le réacteur peut être modélisée par une loi parabolique :

$$P(r) = P_o\left[1 - (\frac{r}{R})^2\right]$$

On note k et k_o les conductivités thermiques du combustible et du revêtement.

a) calculer le flux thermique total dans le combustible, qui sera le flux à évacuer.

b) calculer la répartition de température dans le combustible et le revêtement.

c) montrer que, P_o et R étant fixés, il existe une valeur de R_o pour laquelle les valeurs des températures dans le combustible sont les plus basses possible.

TD n°3 :
Conduction thermique monodimensionnelle
Dans une ailette de section uniforme

Partie A : Analytique

Soit une ailette de forme cylindrique d'axe (Ox), de longueur axiale L, de section droite constante d'aire S et de périmètre p. L'ailette est constituée d'un matériau passif (sans génération interne de chaleur), homogène, isotrope et à propriétés physiques constantes (ρ, C, k). A sa base (x=0) l'ailette est en contact parfait avec un réservoir à température constante T_0. L'ailette échange de la chaleur par convection avec le milieu fluide extérieur à température T_e. Le coefficient de convection h est supposé constant.

1°) rappeler l'hypothèse physique qui permet de supposer que les transferts par conduction dans l'ailette sont unidimensionnels.

2°) Ecrire le bilan thermique relatif à un élément d'ailette compris entre les sections x et x+dx et en déduire l'équation aux dérivées pour T(x,t). Dans la suite on suppose le régime établi.

3°) On pose $m=\sqrt{\dfrac{Hp}{kS}}\, et\, \beta=\dfrac{H}{km}=\sqrt{\dfrac{HS}{kp}}$. Donner la dimension physique de ces groupements.

On suppose que l'ailette est isolée à son extrémité x=L.

a) déterminer la distribution de température T(x)
b) évaluer de deux manières différentes le flux total de chaleur dissipé le long de l'ailette.

4°) Calculer le rendement thermique de l'ailette η.

Exprimer aussi l'efficacité de l'ailette ε . Discuter

5°) En supposant qu'à l'extrémité x=L on a le même coefficient d'échange par convection h, répondre aux questions précédentes. Afin d'optimiser l'efficacité calculer la dérivée logarithmique $\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{d\varepsilon}{dL}$ et montrer qu'elle est du signe de $(1-\beta^2)$. Discuter suivant les valeurs de β.

Partie B : Numérique

Soit une ailette métallique de section circulaire constante (diamètre D=1 cm) et de longueur L=15 cm. La conductivité thermique du matériau est k=50 unités SI, le périmètre est noté p et la section S. Une des extrémités est maintenue à température constante (T_1=200°C) alors que l'extrémité (x=L) est isolée thermiquement. La surface latérale de l'ailette est exposée aux échanges convectifs avec l'air ambiant à température T_f=30°C ; ceci avec un coefficient d'échange h=100 unités SI.

1°) Quelles sont les unités physiques de k et h ?

2°) En divisant la région 0<x<L en trois parties égales et en faisant ainsi apparaître quatre nœuds écrire les bilans d'énergie de chacune des trois parties. En déduire en approximant les dérivées premières de la température les équations aux différences du problème.

3°) Résoudre le système linéaire et déterminer la température e chaque nœud.

4°) Calculer numériquement le flux de chaleur à la base de l'ailette (x=0).

5°) Comparer les résultats numériques des questions 3 et 4 avec la valeur analytique obtenue dans le cas particulier où $\sqrt{\dfrac{\mathrm{hp}}{\mathrm{kS}}}L<<1$. Justifier par application numérique cette hypothèse.

Programme MATLAB de calcul d'un profil d'ailette

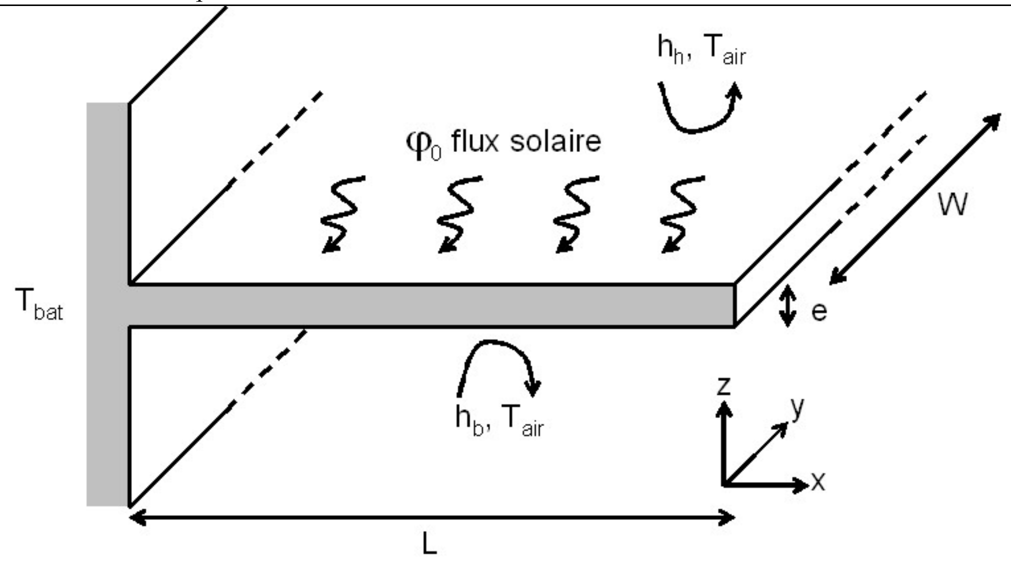
```
%==========================================================================
% DETERMINATION DE TEMPERATURE LE LONG D'UNE AILETTE.
% RIBOUX GUILLAUME 01/03/07
%==========================================================================

clear all;
close all;

% CONSTANTE
==================================================================

N=5;        % Nombre de noeud de discrétisation.
L=10e-2;    % Longueur de l'ailette (m).
D=1e-2;     % Diamètre de l'ailette (m).
dXth=1e-3;  % Distance entre chaque noeud de calcul (m) pour la courbe
théorique;
k=50;       % Conductivité thermique de l'ailette (W.m^(-1).K^(-1)).
h=10;       % Coefficient d'échange du milieu extérieur (W.m^(-2).K^(-1)).
T1=200;     % Température de l'ailette en x=0 (K).
Te=30;      % Température du milieu extérieur (K).

% CALCUL
=====================================================================

% Position et distance des Noeuds de calcul
dx=L/(N-1); % Distance entre chaque noeud de calcul (m);
x=[0:dx:L];

% Matrice de température initiale
theta_init=zeros(N,1);

% Périmètre et surface de l'ailette
p=pi*D;
S=pi*(D^2)/4;

% Constante
m=sqrt(p*h/(S*k));
f=2+(m*dx).^2;

% Biot de maille
Bi=h*dx/k;

% Création de la matrice M à inversée
% Diagonale inférieure de 1
M0=diag(-ones(1,N-1),-1);

% Diagonale supérieure de 1
M1=diag(-ones(1,N-1),1);

% Diagonale de f
M2=diag(f*ones(1,N));

M=M0+M1+M2;

% Conditions aux limites de température de l'ailette
% En x=0, Diriclet
theta_init(1)=T1-Te;
```

```
M(1,1)=1;
M(1,2)=0;

% Profil théorique pour les conditions limites de Diriclet
xth=[0:dXth:L];
Tth=Te+(T1-Te)*(cosh(m*(xth-L)))./(cosh(m*L));

% En x=L, flux nul
%M(N,N)=f;
%M(N,N-1)=-2+(m*dx).^2;

% En x=L, convection
M(N,N)=3+2*Bi;
M(N,N-1)=-4;
M(N,N-2)=1;

% Inversion de la matrice M
Minv=inv(M);

% Calcul du profil de température
T=Minv*theta_init+Te;

% GRAPHIQUE
==================================================================
font=14;

figure
plot(xth,Tth,'--b','linewidth',2)
hold on
plot(x,T,'ob','linewidth',1,'markersize',8,'markerfacecolor','b')
axis([0 L T1 Te]);
xlabel('x (m)','FontSize',font+2);
ylabel('T (^{\circ}C)','FontSize',font+2)
l=legend('Theorie','Numerique');
set(l,'FontSize',font)
set(gca,'FontSize',font)

% End of file
================================================================
```

Partie C : Problème : fuites de chaleur par une terrasse

On cherche à évaluer le flux de chaleur induit par la présence d'une terrasse en béton sur un bâtiment (on parle d'effet d'ailette), sachant que la présence de la terrasse va induire une déperdition en hiver, et un apport de chaleur en été, ce qui peut être très gênant (pour info, une solution existe, celle de la « rupture du pont thermique » qui revient à isoler complètement la dalle de la terrasse du bâtiment, mais qui requière une solution technique généralement plus coûteuse).

On modélise la terrasse considérée par une fine plaque conductrice P, d'épaisseur e (selon z), de longueur L>>e (selon x) et de largeur W>>e (selon y) (voir figure ci-dessous) et de conductivité thermique k, reliée au bâtiment en x=0, qui joue le rôle d'un réservoir de chaleur S_0 (rigoureusement, il s'agit d'une source d'entropie), maintenu à température constante T_{bat}. La plaque est exposée sur sa face supérieure à un flux de chaleur uniforme φ_0 (éclairement solaire – déperdition par rayonnement). On suppose que le problème ne dépend pas de la coordonnée y.



problème sans convection naturelle

On suppose dans cette partie que **les faces inférieures et supérieures et que le bout de la terrasse sont isolés thermiquement vis-à-vis des échanges par convection**.

1°) On souhaite se placer dans le cadre de l'approximation de l'ailette pour la terrasse. Qu'est-ce que cela signifie ?

2°) Dans le cadre de cette approximation, écrire le bilan d'énergie sur un élément de longueur dx de la plaque conductrice (dans la direction x).

3°) En posant $\theta = T(x)-T_o$, et en résolvant l'équation précédente, exprimer la solution générale de T(x). Calculer les constantes de cette solution à l'aide des conditions aux limites en x=0 et x =L.

4°) Exprimer le flux de chaleur Q fourni à la source de chaleur S_0 par unité de longueur dans la direction y.

5°) Application numérique : calculer Q pour une situation hivernale ou estivale.

problème avec convection

On suppose maintenant que **les faces supérieures et inférieures de la plaque se trouvent en contact avec le fluide ambiant à la température T_{air}** (les coefficients d'échange par convection naturelle pour les surfaces haute et basse sont notées h_h et h_b). Pour simplifier les calculs, on suppose que **le bout de l'ailette est isolé thermiquement** (on pourrait considérer des échanges par convection là aussi, mais le calcul serait plus compliqué sans que l'estimation de Q soit beaucoup changée).

6°) Quelle condition serait nécessaire pour pouvoir se placer dans l'approximation de l'ailette ? Est-elle satisfaite ?

7°) On se place dans l'approximation de l'ailette même si la condition théorique n'est pas tout-à-fait satisfaite. Réécrire le bilan d'énergie sur un élément de longueur dx de la plaque conductrice, comme dans la question 2, en tenant compte également des échanges par convection.

8°) En posant $\theta = T(x)-T_{air}$, exprimer la nouvelle solution générale de T(x). Calculer les constantes d'intégration de cette solution à l'aide des conditions aux limites.

9°) Application numérique : recalculer Q pour une situation hivernale ou estivale.

et le coût énergétique dans tout ça… ???

10°) Pour chauffer ou climatiser une pièce de $15m^2$ et de hauteur standard (2m50) on préconise habituellement une puissance de 1000W (information castorama®). En supposant que la pièce est reliée à une terrasse de 4 mètres de largeur (W) et 3 mètres de profondeur (L), est-ce que l'effet d'ailette joue un rôle important dans votre dimensionnement du chauffage ou de la climatisation ?

11°) Que pensez-vous du projet d'architecture tout en béton suivant (http://www.rlarchitectes.com/pages/CIM_BETON_02), localisé à Grenoble (moyenne sur 30 ans des températures maximales de l'air en Août de 26°C et des températures minimales de -2°C en Janvier, avec des extrêmes à 32°C et -10°C) :

Données pour les applications numériques :

Epaisseur de la terrasse béton	e=20 cm		
Profondeur de la terrasse béton	L=3 m		
Conductivité thermique du béton	k=2.0 $Wm^{-1}K^{-1}$		
Coefficient d'échange d'une surface horizontale (vers le haut)			h_h=12 $Wm^{-2}K^{-1}$
Coefficient d'échange d'une surface horizontale (vers le bas)			h_b=8 $Wm^{-2}K^{-1}$
Flux moyen solaire	φ_0=200 Wm^{-2} (hiver)	et 600 Wm^{-2} (été)	
Température du bâtiment	T_{bat}=10°C (hiver)	et 20°C (été)	
Température de l'air	T_{air}=-5 °C (hiver)	et 35°C (été)	

TD n°4 : Conduction thermique bidimensionnelle en régime stationnaire

Exercice 1 : conduction bidimensionnelle dans une plaque plane avec températures imposées

On désire rechercher les solutions de l'équation de diffusion de la chaleur en deux dimensions, en régime stationnaire et en l'absence de source de chaleur. La géométrie étudiée est un rectangle dans le plan Oxy de base a et de hauteur b.

1) On s'intéresse à la famille des solutions du type T(x,y)=X(x).Y(y).
   Discuter celles-ci en fonction du signe de la constante K apparaissant dans le calcul. On envisagera successivement : K>0, K=0 et K<0.
2) Ce sont les conditions aux limites qui vont déterminer l'unicité de la solution. Celles-ci s'écrivent :
   - En x=0 : T=T1
   - En y =0 : T=T1
   - En y=b : T=T1
   - En x=a : T=T1+T2 sin(πy/b)

En posant θ=T-T1, on transformera les 3 premières conditions de Dirichlet en conditions du même type mais homogènes.

3) Déterminer parmi les 3 solutions générales précédentes (trouvées à la question 1) lesquelles sont compatibles avec les conditions aux limites pour la fonction θ.
   a- Calculer les coefficients de la solution choisie.
   b- Donner l'expression de la répartition de la température.
4) Calculer le flux de chaleur sur chacune des faces du matériau rectangulaire.

Exercice 2 : Conduction bidimensionnelle dans une plaque plane avec densité de flux imposée

On considère une place plane de longueur L, de hauteur e et de largeur infinie (pas de gradient de température suivant z). Il n'y a ni source ni puits de chaleur à l'intérieur de la plaque et sa conductivité thermique k est constante. Les faces supérieure (y=e) et inférieure (y=0) sont maintenues à température constante T_1, ainsi que l'extrémité (x=L).

Sur la face x=0, on impose une densité de flux, par unité de largeur, $\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi y}{e}\right)$ (où $\varphi = \overrightarrow{q_{cond}} \cdot \overrightarrow{n_{ext}}$). On pose $\theta(x,y) = T(x,y) - T_1$ et pour simplifier les écritures, on prendra $\varphi_0 = \frac{\pi k \Delta T}{e}$, $\Delta T > 0$ étant un écart de température.

1) Ecrire les 4 conditions aux limites vérifiées par θ.
2) Ecrire l'équation différentielle en θ permettant de calculer la répartition de la température.
3) On cherchera la solution de température en $\theta(x, y)$ à variables séparées $\theta(x, y) = R(x)Q(y)$.
   a- Quelles conditions déduites de la question 1 doivent vérifier les fonctions R(x) et Q(y) ? Montrer en particulier que l'on peut choisir $R'(0) = \varphi_0/k$. Quelle est alors la fonction Q(y) ?
   b- En utilisant 2 et 3a, déterminer R(x) puis θ en fonction de x, y, L, e et ΔT .

4) Déterminer les flux de chaleur, sur chacune des faces x=0, x=e, y=0 et y=e (par unité de largeur). Vérifier le bilan des flux.

Problème : retrouver l'approximation de l'ailette à partir d'un calcul 2D complet

On propose de résoudre analytiquement le problème stationnaire 2D pour une ailette rectangulaire et de voir dans quelle mesure cette solution analytique est en accord avec celle obtenue dans le cadre de l'approximation dite « de l'ailette » justement…
On considère une ailette d'épaisseur e dans la direction y (-e/2≤y<≤e/2), de longueur L dans la direction x (0≤x≤L), et de longueur très grande l dans la direction z (l >> e,L). Sur la face x=0, cette ailette rectangulaire est en contact avec un réservoir de température T_0. Ailleurs, elle échange par convection de la chaleur avec un fluide de température T_f (coefficient d'échange h), sauf en son extrémité (x=L) où pour des raisons de simplification des calculs on va supposer qu'elle est isolée.

Résolution analytique 2D

1) Ecrire l'équation et les conditions limites régissant ce problème.

2) En introduisant θ(x,y)=T(x,y)-T_f, montrer que le problème mathématique devient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$$

$$-k\frac{\partial\theta}{\partial y}=h\theta \quad pour \quad (0\leq x\leq L, y=+e/2) \qquad (1)$$

$$+k\frac{\partial\theta}{\partial y}=h\theta \quad pour \quad (0\leq x\leq L, y=-e/2) \qquad (2)$$

$$-k\frac{\partial\theta}{\partial x}=0 \quad pour \quad (x=L, -e/2\leq x\leq +e/2) \qquad (3)$$

$$\theta=T_0-T_f \quad pour \quad (x=0, -e/2\leq x\leq +e/2) \qquad (4)$$

Pourquoi ce problème est-il résolvable par une méthode de séparation de variables ?
Quelles sont les trois familles de solutions possibles que vous obtenez par cette méthode ?

3) On s'intéresse à la famille de solutions possibles suivante :

$$\theta(x,y)=[A\cos(Ky)+B\sin(Ky)]\,[C\exp(Kx)+D\exp(-Kx)]$$

où K est une constante encore indéterminée.

a- appliquer la condition limite (3) pour trouver une relation entre C et D

b- montrer que pour des raisons de symétrie du problème de part et d'autre de y=0, B=0. Montrer alors que les conditions limites (1) et (2) (de la question 2) obligent K à satisfaire l'équation suivante :

$$\tan\left(\frac{Ke}{2}\right)=\frac{he}{2k}\frac{1}{\left(\frac{Ke}{2}\right)}$$

4) Pour trouver les valeurs de K solutions de cette équation, on propose d'adopter une méthode graphique. Sur la figure 2, on a tracé les fonctions α/X et tan(X) pour différentes valeurs de α. Expliquer comment cette figure vous permet de déterminer les valeurs possibles de K pour l'équation de la question 3b.

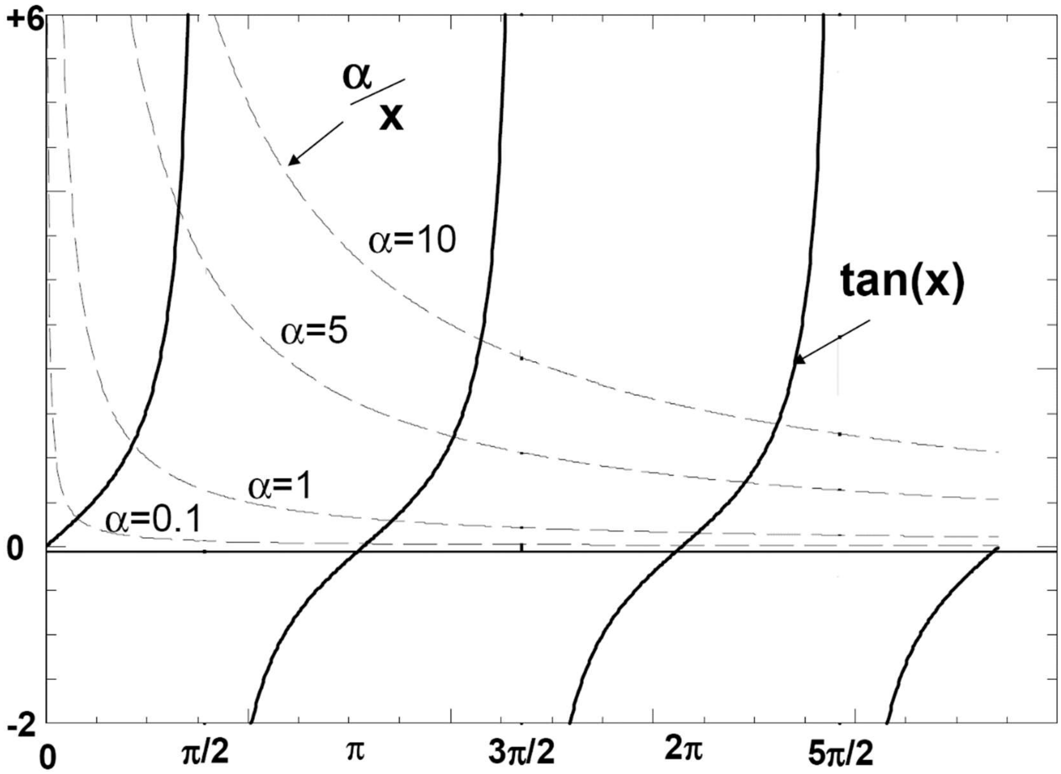


Figure 2 : courbes α/x (traits fins allongés) et tan(x) (traits continus épais)

5) Dans la limite $(he/2k)\rightarrow+\infty$, quelles sont les valeurs prises par K ? Quelles sont alors les valeurs des solutions possibles (question 3) en y=-e/2 et y=+e/2. Retrouver directement ces solutions en modifiant les conditions limites pour θ dès la question 2.

6) Dans la limite $(he/2k)\rightarrow 0$, on sépare la première valeur de K des suivantes.

a- pour K_1, montrer graphiquement ou analytiquement (en remarquant que $\tan(x)\sim x$ pour x petit) que sa valeur est donnée par :

$$K_1 = \sqrt{\frac{he}{2k}}\frac{2}{e}$$

b- quelle est alors la forme en y de la fonction associée à K_1 ? (on pourra prendre par exemple he/2k=0.1 et tracer cette fonction entre y=-e/2 et y=+e/2).

c- pour les autres K : K_2, K_3, etc…, quelles sont leurs valeurs dans la limite $(he/2k)\rightarrow 0$?

7) Comment s'écrit la solution générale du problème 2D ?

Comparaison avec l'approximation de l'ailette

8) Avec les données du problème, dans quelles conditions peut-on utiliser l'approximation de l'ailette pour notre ailette rectangulaire ? Quelle conséquence cela a-t-il sur la dépendance en y du champ de température ? Rappeler l'équation et les conditions limites vérifiées par le champ de température T(x) dans le cadre de cette approximation. On rappelle que la solution à ce problème peut s'écrit :

$$T(x) - T_f = (T_0 - T_f)\frac{\exp(-mx) + \exp(-2mL)\exp(+mx)}{1 + \exp(-2mL)}$$

9) Comparer le premier terme de la solution générale du problème 2D, c'est-à-dire la composante en K_1, et la solution obtenue dans l'approximation de l'ailette. Commenter (en particuliers, que deviennent les termes en K_2, K_3, K_4, etc… du développement 2D ?).