Examen de M2 pro « Turbulence »

6 novembre 2015, M2 pro, 1er semestre 2015-2016

Conditions de l'examen :

- Documents et matériel autorisés : tous documents polycopiés distribués en cours et notes manuscrites personnelles (pas de photocopie) , calculatrice, règle.
- Durée de l'épreuve : 2 heures.
- Présentation : une pénalité (jusqu'à 1 point) sera appliquée aux copies illisibles ou mal rédigées.

1 Sillage turbulent d'un cylindre (7 pts)

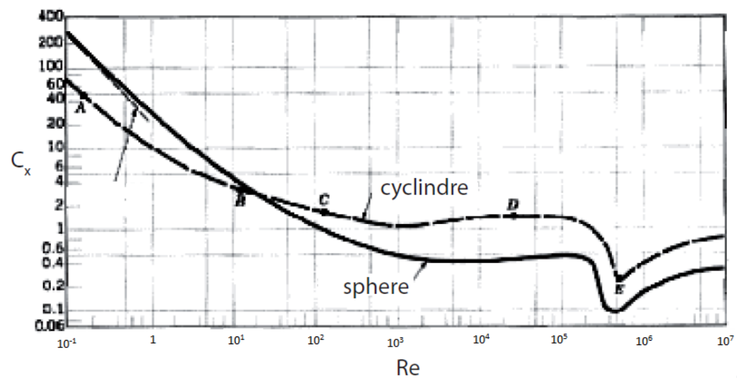

FIGURE 1 – Coefficients de traînée $C_x$en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère et un cylindre

On s'intéresse à un écoulement d'eau autour d'un obstacle cylindrique horizontal, de longueur $L = 2\ m$ (selon z) et de diamètre $D = 0.5\ m$. La vitesse de l'eau loin en amont du cylindre est $U_\infty = 3\ m/s$ selon l'axe x. L'écoulement est donc perpendiculaire à l'axe du cylindre. La longueur du cylindre étant très supérieure à son diamètre, on peut considérer l'écoulement comme statistiquement bidimensionnel dans le plan vertical (x, y). La viscosité cinématique de l'eau est $_nu = 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$.

1. Calculer le nombre de Reynolds $Re = U_\infty D/\nu$ ainsi que la force de traînée F_x exercée sur le cylindre en utilisant les données de la figure **??**. On rappelle que F_x s'exprime comme :

$$F_x = C_x \frac{1}{2} \rho S U^2$$

où S est la surface projetée qui s'oppose à l'écoulement incident.

2. Calculer la puissance P associée au travail de la force de traînée. En faisant des hypothèses sur la taille caractéristique de la zone turbulente en aval du cylindre, estimer un ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de masse ϵ.
3. Rappeler l'expression de l'échelle de Kolmogorov ℓ_η en fonction de ϵ et de la viscosité cinématique ν. En supposant que les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie sont effectivement vérifiées dans le sillage, estimer (calculer) ℓ_η.

4. Combien de points de maillage vous semblent nécessaires pour réaliser une simulation numérique directe de cet écoulement ?
5. En supposant que la contrainte exercée par l'écoulement sur la surface du cylindre est de l'ordre de $\tau = F_x/DL$, donner l'ordre de grandeur de la vitesse de frottement u^* ainsi que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ_ν.
6. En comparant l'échelle de Kolmogorov et l'épaisseur de sous-couche visqueuse, pensez-vous que la contribution dominante à la dissipation ait lieu dans les couches limites ou dans le sillage turbulent ?

2 Production d'énergie cinétique dans une couche limite (6 pts)

On considère un écoulement de couche limite sur une plaque plane semi-infinie. On note x la direction de l'écoulement (avec $x = 0$ le bord d'attaque de la plaque et y la direction normale à la plaque, et l'on considère l'écoulement comme étant statistiquement invariant selon z, la troisième direction). Dans toute la suite, on se place à une distance x fixée et on admet que les propriétés de l'écoulement varient très peu localement selon x (on pourra considérer que $\partial/\partial x = 0$ pour toute quantité physique). On rappelle que dans la sous-couche inertielle (pour $10\delta_\nu << y << \delta$), le profil de vitesse suit la loi :

$$\overline{u_x}(y) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) + C \right) \tag{1}$$

où u^* est la vitesse de frottement, δ_ν l'épaisseur de sous-couche visqueuse, $\kappa \approx 0.4$ la constante de Von Kármán et $C \approx 5$.

1. Rappeler les expressions de u^* et δ_ν en fonction de la contrainte pariétale τ_0, de la densité ρ et de la viscosité cinématique ν. Expliquer en quelques lignes la signification physique de u^* et δ_ν.

On cherche maintenant à caractériser les transferts d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes. On note $k_{tot} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ l'énergie cinétique totale, $k_{moy} = \frac{1}{2}\overline{u_i}\ \overline{u_i}$ l'énergie cinétique moyenne, et $k_{turb} = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ l'énergie cinétique turbulente. On admet que la puissance transférée (par unité de masse) entre écoulement moyen et écoulement turbulent s'écrit sous la forme :

$$P = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

Des expériences montrent que, dans la sous-couhe inertielle, le tenseur de Reynolds est approximativement indépendant de y et que ses composantes peuvent s'écrire (dans la base (x, y, z)) :

$$\tau_{ij} = -\rho u^{*2} \begin{bmatrix} 4.4 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{bmatrix}$$

2. Justifier pourquoi certaines composantes de τ_{ij} sont nulles.
3. A partir de la décomposition de Reynolds, montrer que l'on a toujours :

$$k_{tot} = k_{moy} + k_{turb}$$

4. A partir de l'expression de τ_{ij} calculer k_{turb} en fonction de $u*$. Pour quelle distance à la paroi y/δ_ν a-t-on $k_{moy} = k_{turb}$? Laquelle de ces deux énergies cinétiques domine dans la sous-couche inertielle ?

5. Calculer P en fonction de $u*$, κ et y. Que pensez-vous du comportement de P pour $y \to 0$? Et pour $y >> \delta_\nu$? Tracer son allure en fonction de y. Justifier que P doit être maximal à la transition entre les sous-couche inertielle et visqueuse, et exprimer ce maximum en fonction de u^*, ν et κ (en appliquant l'expression obtenue dans la sous-couche inertielle à $y = \delta_\nu$).

3 modèle $k - \epsilon$ et couche limite (7 pts)

On considère maintenant une couche limite turbulente complètement développée sur une profondeur H d'eau dans un canal hydraulique de très grande largeur. Cela signifie que cette couche limite a des propriétés invariantes selon x et selon y (directions longitudinales et transverses respectivement). Seule la vitesse moyenne longitudinale $\overline{u}$ est non nulle, présentant un profil selon z, la direction normale au canal.

1. Montrer que compte-tenu de la configuration de l'écoulement, les équations du modèle $k-\epsilon$ se réduisent à :

$$0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{dk}{dz}\right) + P - \epsilon \tag{2}$$

$$0 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{d\epsilon}{dz}\right) + C_{\epsilon 1}\frac{P\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{k} \tag{3}$$

2. A quoi se réduit le terme de production P dans l'équation pour k (**??**) ?
3. En rappelant ce qu'est la vitesse de frottement u^*, définir où se situe la loi log et quelle est la forme du profil de vitesse moyen $\overline{u}(z)$ dans cette zone d'existence de la loi log.
4. Montrer que le modèle de longueur de mélange en κz et la définition de la viscosité turbulente ν_t pour le modèle $k - \epsilon$ imposent que :

$$\epsilon = \frac{C_\mu k^2}{u^* \kappa z}$$

5. Pourquoi a-t-on $-\overline{u'w'} = u^{*2}$? Que vaut alors P dans la zone de loi log ?

Des études expérimentales ont montré que dans la zone de la loi log, les termes prépondérants pour l'équation de transport (**??**) de k sont la production P et la dissipation ϵ, bien supérieurs au terme de diffusion.

6. Déduire de l'équiilibre entre P et ϵ dans la zone de loi log que :

$$u^* = (C_\mu k^2)^{1/4}$$

7. En déduire que ϵ s'exprime en fonction de k sous la forme :

$$\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa z}$$

Pour l'équation de transport de ϵ (**??**), on doit conserver un équilibre entre le terme diffusif et les deux autres termes.

8. Montrer que les deux termes de droite se comportent comme un terme puits de la forme $-(C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})\epsilon^2/k$ qui varie en z^{-2} en supposant que k reste quasi-constant.

9. En équilibrant ce terme avec le terme diffusif pour ϵ (en supposant k quasi constant avec z), montrer que l'on doit avoir :

$$\kappa^2 = \sigma_\epsilon C_\mu^{1/2} (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})$$

10. Calculer κ avec les valeurs usuelles (classique) des paramètres du modèle $k - \epsilon$. Cette valeur vous paraît-elle compatible avec les données expérimentales ?

Annexe : modèle $k - \epsilon$ classique

$$\begin{aligned}
&Equations \quad R.A.N.S. \quad et \\
-\overline{u_i' u_j'} &= -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \qquad (4) \\
\nu_t &= C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \\
\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{u_i} k \right)}{\partial x_i} &= -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\
\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{u_i} \epsilon \right)}{\partial x_i} &= -C_{\epsilon 1} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right)
\end{aligned}$$

avec $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$ et $C_{\epsilon 2} = 1.92$ pour le modèle standard.