Examen de M2 pro « Turbulence »

28 novembre 2014, M2 pro, 1er semestre 2013-2014

Conditions de l'examen :
– Documents et matériel autorisés : tous documents de cours et TD, calculatrice, règle.
– Durée de l'épreuve : 2 heures.
– Présentation : une pénalité (jusqu'à 1 point) sera appliquée aux copies illisibles ou mal rédigées.

1 Equation de transport pour k en 2D (8 points)

On se propose ici de recalculer l'expression de l'équation pour k, l'énergie cinétique turbulente, dans une géométrie purement 2D (calcul plus simple qu'en 3D). On note x et z les deux coordonnées, et u, w et p les composantes de la vitesse et la pression.

1. Rappeler les équations R.A.N.S. pour la quantité de mouvement selon x et z, ainsi que l'équation de continuité.
2. Retrancher aux équations de Navier-Stokes ces équations R.A.N.S. et montrer que les composantes instantanées du champ de vitesse $u' = u - \overline{u}$ et $w' = w - \overline{w}$ vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial u'}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2} - u'\overline{u} - u'^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'} - w'\overline{u} - u'w'\right) \\ &\quad + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) \qquad (1) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial w'}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'w'} - u'\overline{w} - u'w'\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'^2} - w'\overline{w} - w'^2\right) \\ &\quad + \nu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

Pour aboutir à une équation de transport pour $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{w'^2}\right)$, il faut multiplier ces deux équations par respectivement u' et w' puis en faire la somme, avant de procéder à une moyenne temporelle de l'équation obtenue. Pour transformer les termes obtenus, il convient de faire un usage important de l'équation de continuité pour le champ moyen et pour les fluctuations de vitesse.

3. Montrer que les termes advectifs à gauche deviennent bien : Dk/Dt où D représente la dérivée lagrangienne le long du champ de vitesse moyen $(\overline{u}, \overline{w})$.
4. Montrer que les termes de pression deviennent :

$$-\frac{\partial \overline{u'p'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z}$$

5. Montrer que dans les divergences (en parenthèses), les premiers termes aboutissent à une moyenne nulle.
6. Montrer que les deuxièmes termes, une fois tous réunis, et après transformation, donnent naissance à un terme de production de turbulence noté $\mathcal{P}$, égal à :

$$\mathcal{P} = -\overline{u'^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{w'^2}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}$$

7. Montrer que les troisièmes termes, une fois réunis, peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\overline{u'u'u'}\right)}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\overline{u'w'w'}\right)}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\overline{w'w'w'}\right)}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\overline{u'u'w'}\right)}{\partial z}$$

8. Pour traiter les termes visqueux, montrer d'abord que :

$$u'\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u'^2}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2$$

9. Réunir les quatres termes visqueux apparaissant dans l'équation de k, et montrer que l'ensemble s'écrit comme la somme d'un terme de pure diffusion $\nu\left(\partial^2 k/\partial x^2+\partial^2 k/\partial z^2\right)$ et d'un terme de dissipation, égal à :

$$-\nu\left(\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2}\right)$$

10. On met l'équation de transport pour k sous la forme :

$$\frac{Dk}{Dt}=\mathcal{P}-\epsilon+div(\vec{T})$$

Que contiennent les deux composantes du vecteur de diffusion $\vec{T}$?

2 DNS d'une couche limite sur fond lisse (4 points)

On souhaite réaliser une simulation directe numérique d'un écoulement de couche limite dans une conduite lisse de rayon R. On peut imposer un gradient de pression dP/dx constant entre l'entrée et la sortie de la conduite. Calculer ce que vaut τ_p le frottement pariétal qui s'oppose au gradient de pression. En déduire la vitesse de frottement u^* pour la couche limite.
Dans la zone de loi log, la production turbulente $\mathcal{P}=-\overline{u'w'}d\overline{u}/dz$ s'équilibre avec la dissipation ϵ. Utiliser la forme du profil et la vitesse de frottement pour estimer $\mathcal{P}$ au début de la zone de loi log (qui démarre vers $y^+\approx 30$). En déduire ϵ.
Quelle pas de maillage doit-on choisir pour pouvoir réaliser la simulation ? Quelle taille de domaine de simulation vous semble approprié ?

3 Jet turbulent avec transferts thermiques (13 points)

On considère un jet plan d'air se développant dans de l'air au repos (voir figure 1). On note (u,v,w) les composantes de la vitesse selon (x,y,z), avec x la direction longitudinale (l'origine $x=0$ est prise à la sortie de l'injecteur), y la direction transverse au jet et z la direction perpendiculaire au plan de la figure. La largeur d de l'injecteur étant très petite devant la profondeur Δz (normale au plan de la figure), on peut considérer, pour des distances $x<\Delta z$ en aval, que l'écoulement est statistiquement bidimensionnel : toutes les grandeurs statistiques sont indépendantes de z.
L'air injecté est à une température T_j légèrement supérieure à l'air ambiant, de température T_a.On note $\theta(x,y,z,t)$ la différence de température avec l'air ambiant ($T(x,y,z,t)=T_a+\theta(x,y,z,t)$) et on suppose qu'on reste en régime de convection forcée (pas d'effets des variations de masse volumique avec la température).

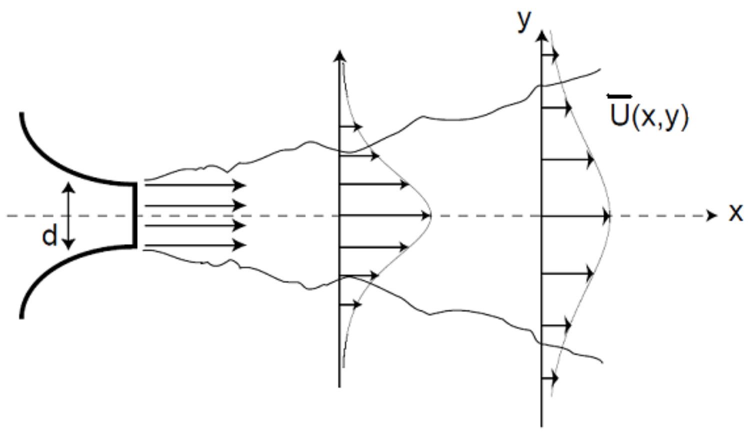

Figure 1 – Développement d'un jet plan turbulent et profils de vitesse dans la partie autosimilaire.

1. Ecrire les 3 équations vérifiées par les composantes $\overline{u}$ et $\overline{v}$ du champ de vitesse moyen et la pression $\overline{p}$.
2. Expliquer comment, pour le jet plan, on peut simplifier les système d'équations précédent pour aboutir au système suivant :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \tag{4}$$

3. On définit le flux de quantité de mouvement selon x (par unité de profondeur selon z) M comme :

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \overline{u}^2 dy$$

Montrer que cette quantité se conserve selon x.
4. On modélise le tenseur de Reynolds au moyen d'une viscosité turbulente ν_t. Que devient le terme de droite de l'équation (4) ?

On recherche une solution autosimilaire à ce problème. On introduit donc l'épaisseur du jet $\delta(x)$ et une vitesse centrale $U_c(x)$, qu'on écrit sous la forme :

$$\delta(x) = Ax^p$$
$$U_c(x) = Bx^q$$

où p et q sont des inconnues pour l'instant. Le champ moyen $\overline{u}$ s'écrit alors $\overline{u}(x,y) = U_c(x)f'(\eta)$ où η est la variable réduite $\eta = y/\delta(x)$ et f' la dérivée d'une fonction à 1 variable f.

5. Calculer le flux de moment M et montrer que sa conservation le long du jet nécessite que $2q + p = 0$.
6. A partir de l'équation de continuité pour les vitesses moyennes, montrer que la vitesse moyenne latérale s'écrit :

$$\overline{v} = U_c \frac{d\delta}{dx}(\eta f' - f) - \frac{dU_c}{dx}\delta f \tag{5}$$

7. On adopte le modèle de turbulence suivant : $\nu_t = C\delta U_c$. A quelle famille de modèle cela correspond-t-il ? A Quel type d'écoulement est-il adapté ?
8. A partir de l'équation de quantité de moment en x, et en remplaçant U_c et δ par les lois de puissance correspondantes, montrer que f doit vérifier :

$$qB^2x^{2q-1}\left(f'^2 - ff''\right) - pB^2x^{2q-1}ff'' = B^2\frac{C}{A}x^{2q-p}f''' \tag{6}$$

9. Montrer qu'une solution autosimilaire n'est possible que si $p = 1$ et $q = -1/2$.
10. Dans ces conditions, montrer que l'équation et les conditions limites vérifiées par f sont :

$$\begin{aligned} \frac{C}{A}f''' + ff'' + \frac{1}{2}\left(f'^2 - ff''\right) &= 0 \\ f'(\infty) = f(0) = 0 \quad et \quad f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

11. Pour $A/C = 4$, montrer que l'équation devient $f''' + 2(ff')' = 0$ et que $f(\eta) = tanh(\eta)$ est bien la solution de cette équation avec les conditions limites données plus haut.
12. Expérimentalement, les mesures d'élargissement du jet (mesure de A) conduisent à une valeur de C égale à 0.033. En recalculant M, exprimer la loi d'évolution de la vitesse centrale du jet et montrer qu'elle évolue en :

$$U_c(x) = 2.383\sqrt{\frac{M}{\rho x}}$$

Remarque : on notera que $\int_0^\infty f'^2(u)du = 1$.

On s'intéresse maintenant au champ de température et à son évolution le long du jet.

13. Ecrire l'equation de la chaleur pour la température θ, puis pour le champ moyen $\overline{\theta}$ en appliquant l'opérateur de moyenne temporelle.
14. Expliquer comment, pour le jet plan, on peut simplifier l'équation précédente pour aboutir à l'équation suivante :

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} = -\frac{\partial\overline{v'\theta'}}{\partial y} \tag{7}$$

15. On définit le flux d'enthalpie selon x (par unité de profondeur selon z) Φ_H comme :

$$\Phi_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho C_p \overline{\theta}\,\overline{u} dy \tag{8}$$

Montrer que cette quantité se conserve selon x.

16. Calculer le flux d'enthalpie Φ_H et montrer que sa conservation le long du jet nécessite que $n = -1/2$.
17. On modélise le flux turbulent de quantité de chaleur par une diffusivité turbulente a_t. Ecrire comment s'exprime le terme $-\overline{v'\theta'}$ en fonction de $d\overline{\theta}/dy$.
18. On introduit un nombre de Prandtl turbulent Pr_t. Quelle est sa définition ? Pourquoi ce Prandtl turbulent doit être constant, de l'ordre de l'unité ?

On recherche une solution autosimilaire au problème therrmique. On introduit donc une différence de température centrale $\theta_c(x)$, qu'on écrit sous la forme :

$$\theta_c(x) \quad = \quad Dx^n \tag{9}$$

Le champ moyen $\overline{\theta}$ s'écrit alors $\overline{\theta}(x, y) = \theta_c(x)g(\eta)$ où g est une fonction à 1 variable.

19. Montrer que l'équation pou $\overline{\theta}$ devient alors :

$$U_c f' \left(\frac{d\theta_c}{dx} g - \frac{\theta_c}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \eta g' \right) + \left(U_c \frac{d\delta}{dx} \left(\eta f' - f \right) - \frac{dU_c}{dx} \delta f \right) \frac{\theta_c}{\delta} g' = C \frac{\delta U_c}{Pr_t} \frac{\theta_c}{\delta^2} g''$$

20. Montrer que g satisfait l'équation et les conditions limites suivantes :

$$\frac{C}{APr_t} g'' + f f'' + \frac{1}{2} \left(fg - fg' \right) = 0 \quad (10)$$

$$g(\infty) = g'(0) = 0 \quad (11)$$

21. Avec $A/C = 4$, montrer que la solution est $g(\eta) = f'(\eta)^{Pr_t} = \left(\frac{1}{cosh(\eta)} \right)^{2Pr_t}$.

On trouve un bon accord avec les mesures expérimentales pour $Pr_t = 0.9$

22. L'extension transverse du champ de température est-elle plus importante ou moins importante que celle du champ de vitesse ?
23. Exprimer la température au centre du jet en fonction du flux d'enthalpie imposé Φ_H et montrer qu'elle vaut :

$$\theta_c(x) = 2.33 \frac{\Phi_H}{C_p \sqrt{\rho M x}}$$

Remarque : pour $Pr_t = 0.9$, on trouve numériquement $\int_0^\infty \left(\frac{1}{cosh(u)} \right)^{2Pr_t+2} du = 0.6862$.