

Oscillations d'une goutte accrochée à un capillaire :
Approche de stabilité globale

ZHANG Tonglei
M2R DET

Résumé

Voici résumé.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte général	1
1.2	Étude bibliographique	1
2	Goutte ou bulle non visqueux	2
2.1	Position du problème	2
2.1.1	Étude du champ de base	2
2.1.2	Équations générales	2
2.1.3	Décomposition modale	3
2.1.4	Linéarisation des équations	4
2.2	Modélisation numérique	4
2.2.1	Formulation variationnelle	4
2.2.2	Écriture du problème sous forme matricielle	5
2.3	Validation du code	6
2.3.1	Cas d'une goutte sans contrainte	6
2.3.2	Cas d'une goutte avec contrainte	9
2.3.3	Cas d'une bulle sans contrainte	13
2.3.4	Cas d'une bulle avec contrainte	14
3	Une gouttelette de liquide immergée dans un autre fluide non visqueux	15
3.1	Position du problème	15
3.1.1	Étude du champ de base	15
3.1.2	Équations générales	16
3.1.3	Décomposition modale	16
3.1.4	Linéarisation des équations	16
3.2	Modélisation numérique	17
3.2.1	Formulation variationnelle	17
3.2.2	Écriture du problème sous forme matricielle	18
3.3	Validation du code	19
3.3.1	Cas sans contrainte	19
3.3.2	Cas avec contrainte	21
4	Une goutte attachée à un tube capillaire non visqueux	22
4.1	Position du problème	23
4.1.1	Étude du champ de base	23
4.1.2	Équations générales	24
4.1.3	Décomposition modale	24
4.1.4	Linéarisation des équations	25

4.2	Modélisation numérique	26
4.2.1	Formulation variationnelle	26
4.2.2	Écriture du problème sous forme matricielle	27
5	Conclusion	28
6	Annexes	29

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte général

Un.

Deux.

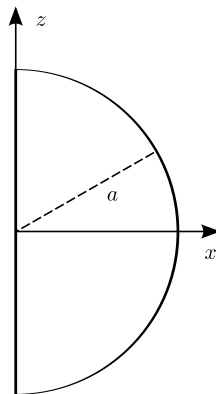
1.2 Étude bibliographique

Chapitre 2

Goutte ou bulle non visqueux

2.1 Position du problème

2.1.1 Étude du champ de base



Nous adopterons le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centré au centre de la goutte.

Notons :

a : le rayon d'équilibre de la goutte

Φ : le potentiel de vitesse

P : la pression du côté intérieur

H : le rayon de la goutte

2.1.2 Équations générales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{dans le volume } \Omega \\ P + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 & \text{dans le volume } \Omega \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ P = \sigma \mathcal{C} & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition dynamique)} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où

ρ : la masse volumique du fluide

σ : le coefficient de tension superficielle

\mathcal{C} : la courbure moyenne de l'interface

2.1.3 Décomposition modale

On considère maintenant l'oscillation linéaire d'une goutte sphérique par rapport à la position d'équilibre :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \varphi(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ P &= P_0 + p(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ H &= a + \varepsilon \eta(\theta, \phi) e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Nous exprimons la forme de la goutte comme une fonction implicite S_d telle que :

$$S_d(r, \theta, \phi, t) = r - [a + \varepsilon \eta(\theta, \phi) e^{-i\omega t}] = 0. \quad (2.2)$$

où ε est un petit paramètre.

Pour une courbe plane représentée sous la forme de fonction implicite $S_d(r, \theta, \phi, t) = 0$, on sait que la courbure est définie comme :

$$\mathcal{C} = \text{div}(\vec{n}) \quad \text{où } \vec{n} = \frac{\nabla S_d}{\|\nabla S_d\|}$$

La courbure de la surface libre se calcule alors de la façon suivant :

$$\begin{aligned}\nabla S_d &= \frac{\partial}{\partial r} S_d \mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S_d \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} S_d \mathbf{e}_\phi \right] e^{-i\omega t} \\ &= \mathbf{1} \mathbf{e}_r - \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \mathbf{e}_\phi \right] e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla S_d\| &= \left\| \mathbf{1} \mathbf{e}_r - \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \mathbf{e}_\phi \right] e^{-i\omega t} \right\| \\ &= \sqrt{1 + o(\varepsilon^2)} \\ &= 1 + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

$$\vec{n} = \mathbf{1} \mathbf{e}_r - \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \mathbf{e}_\phi \right] e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{n}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \mathbf{1}] + \varepsilon \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \right) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \right] \right] e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{2}{r} - \varepsilon \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \right) \right] e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2) \\ &= \frac{2}{r} - \varepsilon \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta \right) \right] e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

on remplace r par $[a + \varepsilon \eta e^{-i\omega t}]$, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a + \varepsilon \eta e^{-i\omega t}} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{1}{a^2} \eta e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + o(\varepsilon^2)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \text{div}(\vec{n}) \\ &= \frac{2}{a} - \varepsilon \frac{2}{a^2} \eta(\theta, \phi) e^{-i\omega t} - \varepsilon \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta) \right] e^{-i\omega t} + o(\varepsilon^2) \\ &= \mathcal{C}_0 + \varepsilon \mathcal{C}_1 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On obtient ainsi le terme de courbure lié aux petites perturbations :

$$\mathcal{C}_1 = -\frac{2}{a^2} \eta e^{-i\omega t} - \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \eta) \right] e^{-i\omega t} \quad (2.3)$$

dans le cadre de ce sujet, on met $\phi = 0$, alors

$$\mathcal{C}_1 = - \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right] e^{-i\omega t}. \quad (2.4)$$

2.1.4 Linéarisation des équations

La linéarisation des équations s'effectue en remplaçant dans le système d'équations d'équilibre (2.1) le potentiel de vitesse, le champ de pression et la courbure par leur décomposition, puis en conservant uniquement les termes d'ordre 1 par rapport aux petites perturbation introduites. Nous obtenons ainsi le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{dans le volume } \Omega \\ p + \lambda \rho \varphi = 0 & \text{dans le volume } \Omega \\ \lambda \eta = \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ p = -\sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right] & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition dynamique)} \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec $\lambda = -i\omega t$ les valeurs propre recherchés.

2.2 Modélisation numérique

2.2.1 Formulation variationnelle

Pour l'implémentation de ces équations sous FreeFem++ il convient de mettre en place une formulation variationnelle (ou formulation faible). Pour cela, introduit des fonction test (φ^*, p^*, η^*) associées à (φ, p, η) .

La formulation variationnelle du problème (2.5) se met alors en plusieurs étapes. Dans un premiers temps, on multiplie scalairement les équation du problème (2.5) par leur fonction test associée :

$\forall (\varphi^*, p^*, \eta^*),$

$$\begin{cases} (\Delta \varphi) \cdot \varphi^* = 0 \\ (p + \lambda \rho \varphi) \cdot p^* = 0 \\ (p + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right]) \cdot \eta^* = 0 \end{cases}$$

Ensuite, on intègre ces trois équations. On obtient alors :

$$\forall(\varphi^*, p^*, \eta^*),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta\varphi, \varphi^*)_{\Omega} = 0 \\ (-p, p^*)_{\Omega} = \lambda (\rho\varphi, p^*)_{\Omega} \\ \langle p + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, la condition cinématique est introduite au sein de cette formulation grâce à la formule de Green s'écrit :

$$\forall\varphi^*,$$

$$(\Delta\varphi, \varphi^*)_{\Omega} = -(\nabla\varphi, \nabla\varphi^*)_{\Omega} + \langle \nabla\varphi \cdot \vec{n}, \varphi^* \rangle_S$$

Or la condition cinématique donne $\lambda a \eta = \nabla\varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi$. On obtient donc :

$$\forall\varphi^*,$$

$$(\Delta\varphi, \varphi^*)_{\Omega} = -(\nabla\varphi, \nabla\varphi^*)_{\Omega} + \lambda \langle \eta, \varphi^* \rangle_S$$

On en déduit alors la formulation faible du problème (2.5) :

$$\forall(\varphi^*, p^*, \eta^*),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla\varphi, \nabla\varphi^*)_{\Omega} = \lambda \langle \eta, \varphi^* \rangle_S \\ -(p, p^*)_{\Omega} = \lambda (\rho\varphi, p^*)_{\Omega} \\ \langle p + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

On trouve que

$$\langle \sigma \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta), \eta^* \rangle_S = - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S$$

On peut simplifier la formulation (2.6) comme la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla\varphi, \nabla\varphi^*)_{\Omega} = \lambda \langle \eta, \varphi^* \rangle_S \\ -(p, p^*)_{\Omega} = \lambda (\rho\varphi, p^*)_{\Omega} \\ \langle p + \sigma \frac{2}{a^2} \eta, \eta^* \rangle_S - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

2.2.2 Écriture du problème sous forme matricielle

On peut mettre la formulation variationnelle (2.7) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ B_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Or, il s'avère que la formulation (2.8) est instable.

2.3 Validation du code

2.3.1 Cas d'une goutte sans contrainte

On sait que la valeur propre d'une goutte non visqueuse est généralisée par H. Lamb sous la forme suivante :

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho a^3}$$

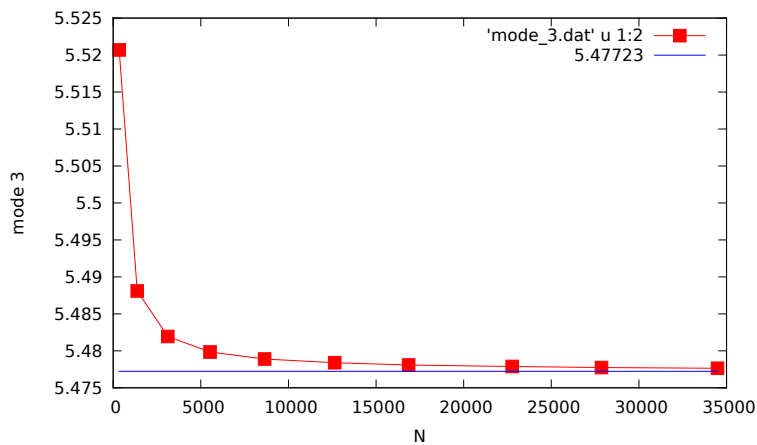
On met $\sigma = 1$, $\rho = 1$, $a = 1$ et le paramètre de pénalisation $\epsilon = 10^{-7}$ pour comparer les données dans le tableau suivant :

Mode	ω_2	ω_3	ω_4
$N = 343$	2.83907	5.52070	8.59330
$N = 1372$	2.83108	5.48809	8.51209
$N = 3114$	2.82957	5.48195	8.49715
$N = 5523$	2.82907	5.47985	8.49182
$N = 8641$	2.82883	5.47889	8.48943
$N = 12642$	2.82871	5.47839	8.48818
$N = 16861$	2.82863	5.47808	8.48742
$N = 22767$	2.82858	5.47788	8.48691
$N = 27862$	2.82855	5.47774	8.48657
$N = 34484$	2.82852	5.47764	8.48632
Théorique	2.82843	5.47723	8.48528

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

Nous obtenons des valeurs propres très proches de celles obtenues analytiquement par H. Lamb.

On choisit le troisième mode $\omega_3 = 5.47723$ pour étudier la convergence de code FreeFem++.



On peut considérer que le code FreeFem++ est convergent par rapport au nombre de triangles constituant le maillage.

Ensuite on choisit le nombre de triangles $N = 50$ pour étudier la sensibilité du paramètre de pénalisation ϵ .

Mode	ω_2	ω_3	ω_4
$\epsilon = 10^{-3}$	2.82884	5.47889	8.48943
$\epsilon = 10^{-4}$	2.82883	5.47889	8.48943
$\epsilon = 10^{-5}$	2.82883	5.47889	8.48943
$\epsilon = 10^{-6}$	2.82883	5.47889	8.48943
$\epsilon = 10^{-7}$	2.82883	5.47889	8.48943
$\epsilon = 10^{-8}$	nul	nul	nul
Théorique	2.82843	5.47723	8.48528

On peut considérer que la sensibilité du paramètre de pénalisation ϵ est négligeable et son effet sur les solutions est négligeable.

Enfin on choisit le troisième mode $\omega_3 = 5.47723$ et le nombre de triangles $N = 8641$ pour visualiser le potentiel de vitesse, le champ de vitesse, la pression et le déplacement de surface.

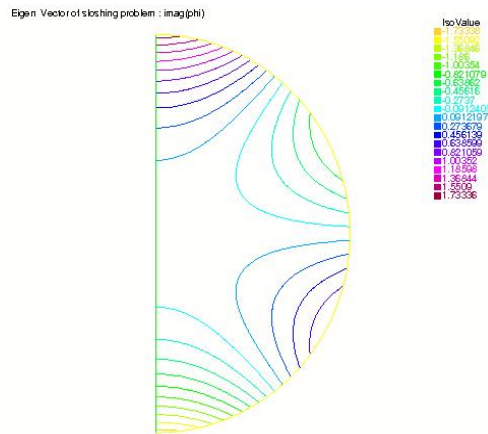


Figure 2.1: potentiel de vitesse

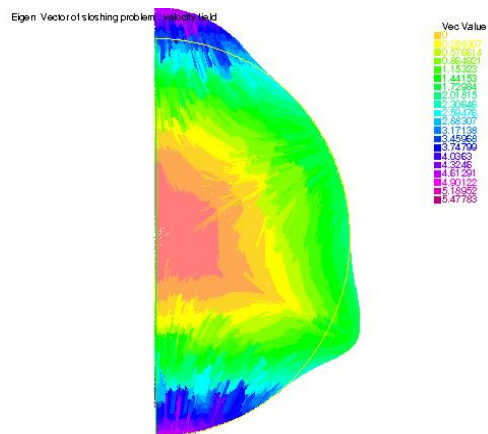


Figure 2.2: champ de vitesse

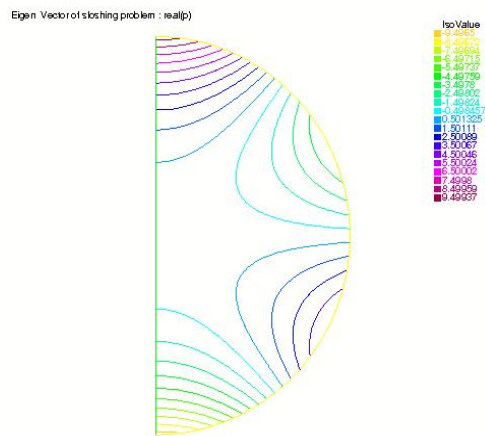


Figure 2.3: pression

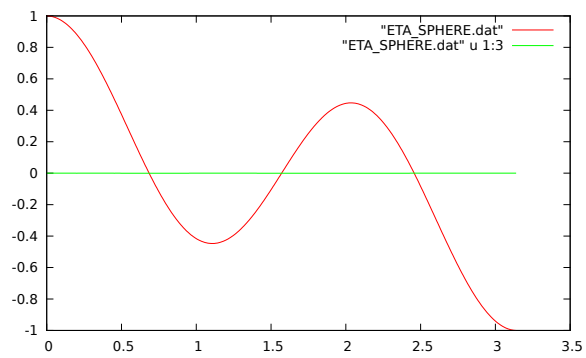
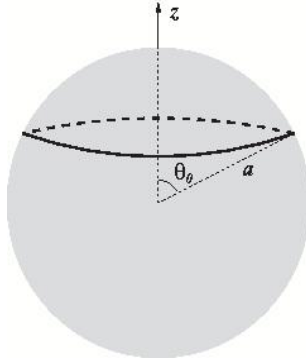


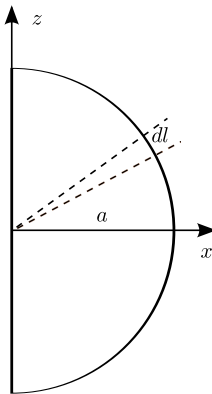
Figure 2.4: déplacement de surface

2.3.2 Cas d'une goutte avec contrainte

Dans cette partie, on va vérifier les données de A. Prosperetti. Il a mis la contrainte comme la position suivant :



Pour valider le code, on coupe la ligne surface et défini une condition limite que le déplacement de dl est nul.



Pour obtenir un point de singularité on met le noeud de dl toujours égale 1 et on espère dl le plus petit possible. On va vérifier les solutions sont converges quand dl tend vers 0. On choisi $N = 5505$ et $\cos(\theta_0) = 0.5$.

Mode	ω_2	ω_3	ω_4
$dl = 10^{-3}$	2.92457	6.79912	9.95208
$dl = 10^{-4}$	2.92340	6.79662	9.94586
$dl = 10^{-5}$	2.92327	6.79633	9.94523
$dl = 10^{-6}$	2.92326	6.79631	9.94517
$dl = 10^{-7}$	nul	nul	nul
Prosperetti	2.92733	6.84238	10.065

On trouve que les solutions sont converges quand dl tend vers 0, mais les solutions ne sont pas les valeurs de A. Prosperetti exactement. Peut-être on a trouvé les solutions plus précis, parce que on réalise un point de singularité. On choisi $dl = 10^{-4}$ pour le travail suivant.

Ensuite, on fait une comparaison des fréquences obtenues avec les données de A. Prosperetti, où la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et $\mu_0 = \cos(\theta_0)$. Ici, On choisi $N = 22839$.

Mode	ω_2		ω_3		ω_4	
	Prosperetti	FreeFem++	Prosperetti	FreeFem++	Prosperetti	FreeFem++
$\mu_0 = 0$	0.7138	0.7028	0.8717	0.8718	1.706	1.682
$\mu_0 = 0.2$	0.6197	0.6142	1.020	1.011	1.474	1.465
$\mu_0 = 0.5$	0.4659	0.4651	1.089	1.081	1.602	1.581
$\mu_0 = 0.7$	0.5287	0.5234	0.9116	0.9095	1.555	1.546
$\mu_0 = 0.9$	0.6728	0.6671	1.177	1.159	1.492	1.469

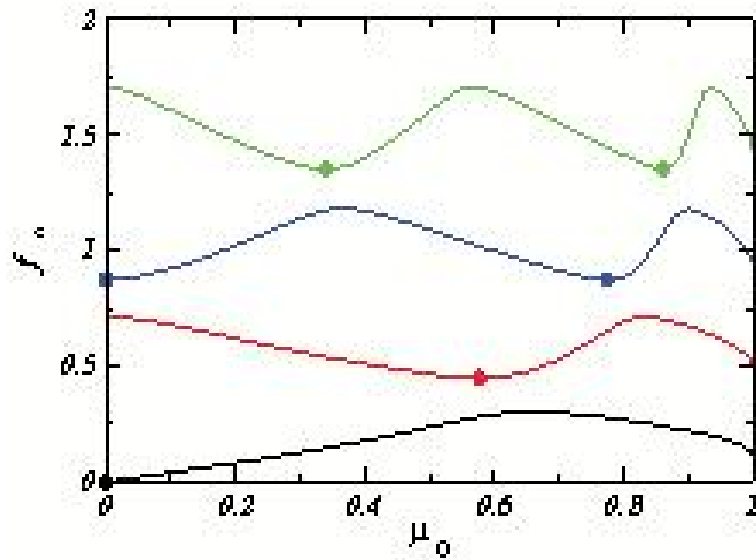


Figure 2.5: Prosperetti

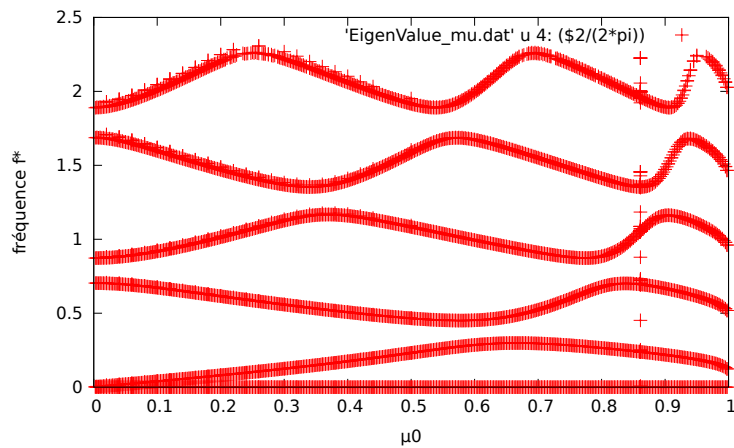


Figure 2.6: FreeFem++, $N \approx 1400$

Enfin, par exemple $N = 8643$ et $\mu_0 = 0.5$, on choisit le troisième mode $\omega_3 = 6.7966$ et visualise le potentiel de vitesse, le champ de vitesse, la pression et le déplacement de surface. En même temps, on fait une comparaison des résultats avec le cas sans contrainte.

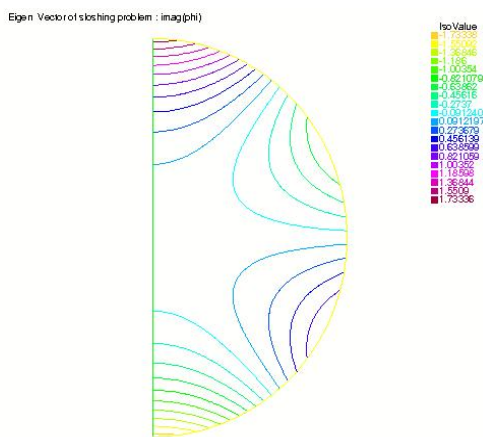


Figure 2.7: potentiel de vitesse sans contrainte

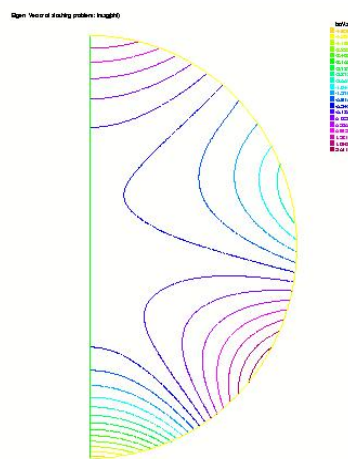


Figure 2.8: potentiel de vitesse avec contrainte

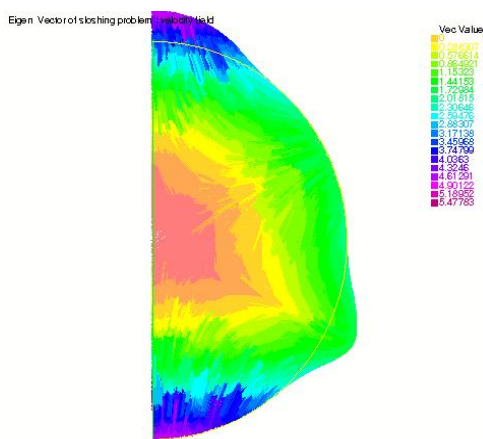


Figure 2.9: champ de vitesse sans contrainte

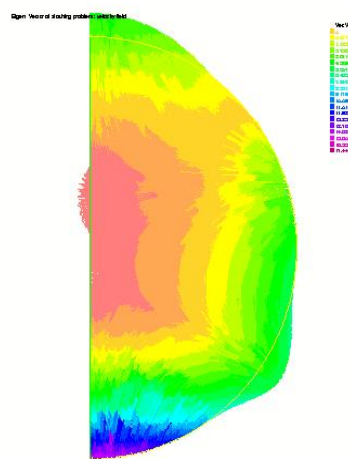


Figure 2.10: champ de vitesse avec contrainte

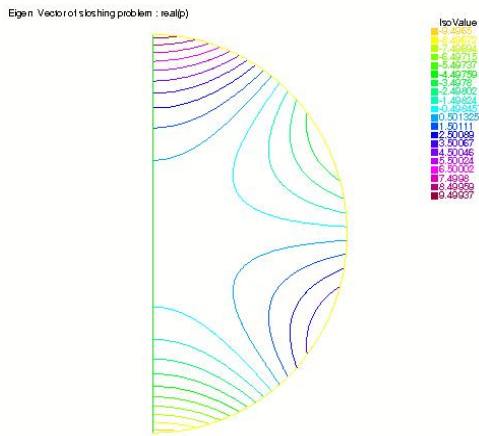


Figure 2.11: pression sans contrainte

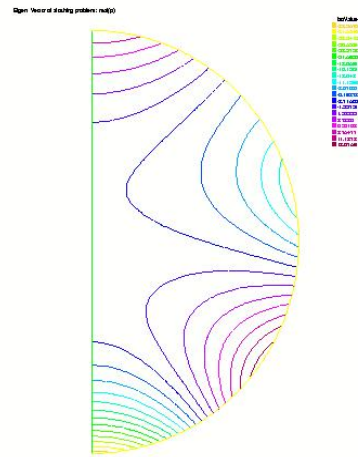


Figure 2.12: pression avec contrainte

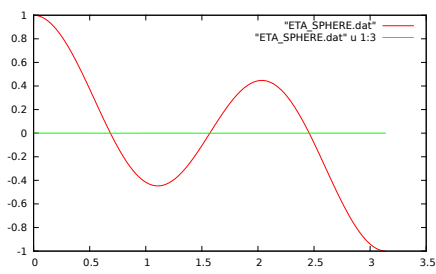


Figure 2.13: déplacement de surface sans contrainte

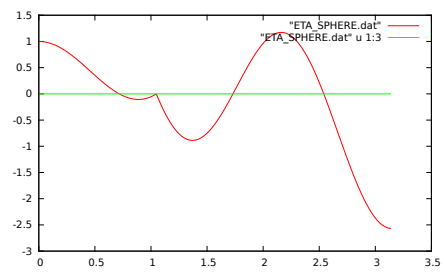
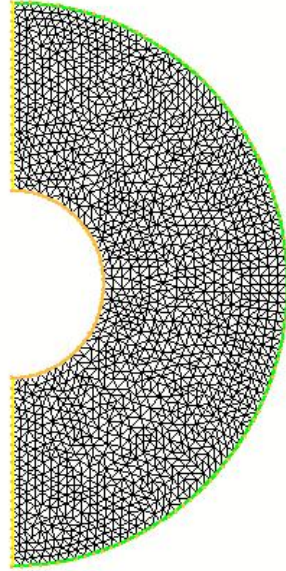


Figure 2.14: déplacement de surface avec contrainte

2.3.3 Cas d'une bulle sans contrainte

Pour le cas d'une bulle, on modifie l'espace d'élément fini seulement comme au-dessous :



On sait que la valeur propre d'une bulle non visqueux est généralisé par H. Lamb sous la forme suivante :

$$\omega_n^2 = (n-1)(n+1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho a^3}$$

On met $\sigma = 1$, $\rho = 1$, $a = 1$, le rayon de grand demi cercle $R_{MAX} = 5$ et le parametre de pénalisation $\epsilon = 10^{-7}$ pour comparer les données dans le tableau suivant :

Mode	ω_2	ω_3	ω_4
$N = 388$	3.4904	6.41201	9.68805
$N = 1539$	3.4695	6.34761	9.53215
$N = 3676$	3.4660	6.33364	9.50818
$N = 6293$	3.4646	6.32973	9.49995
$N = 10110$	3.4638	6.32786	9.49457
$N = 14567$	3.4635	6.32693	9.49236
$N = 19709$	3.4633	6.32619	9.49102
$N = 25637$	3.4631	6.32586	9.48988
$N = 32479$	3.4630	6.32553	9.48934
$N = 40057$	3.4629	6.32533	9.48875
Théorique	3.4641	6.32456	9.48683

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

2.3.4 Cas d'une bulle avec contrainte

Dans ce cas, on fait une comparaison qualitative des fréquences obtenues par FreeFem++ avec les données de A. Prosperetti seulement.

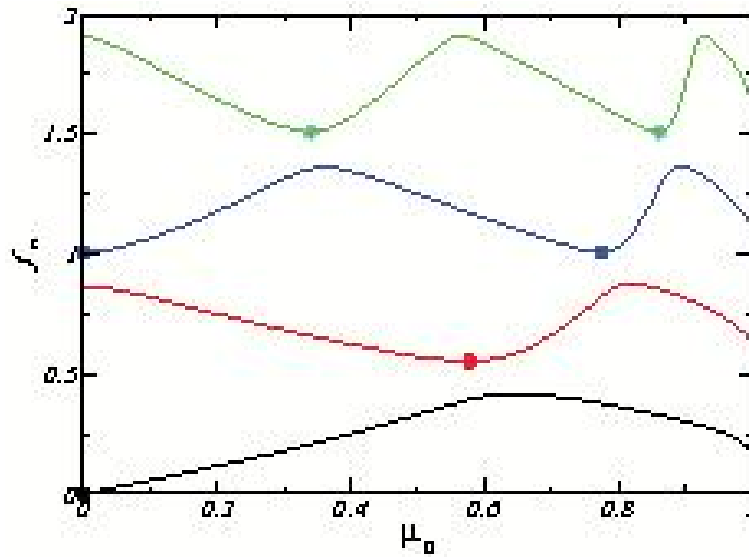


Figure 2.15: Prosperetti

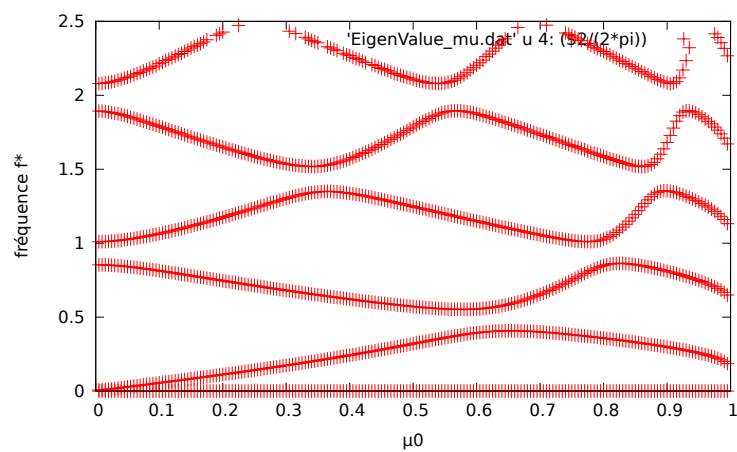


Figure 2.16: FreeFem++

Chapitre 3

Une gouttelette de liquide immergée dans un autre fluide non visqueux

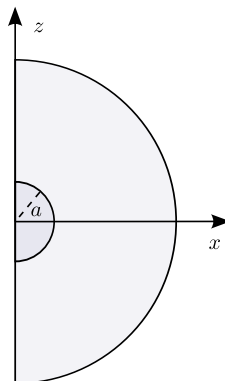
Dans ce chapitre, on va vérifier la formule au-dessous :

$$\omega_n^2 = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\sigma}{(\rho_1(n+1) + \rho_2 n)a^3} \quad (3.1)$$

Dans le cadre de ce rapport, on définit ρ_1 est la masse volumique de la gouttelette de liquide (Fluide 1) et ρ_2 est la masse volumique du fluide où la gouttelette de liquide immergée (Fluide 2).

3.1 Position du problème

3.1.1 Étude du champ de base



Nous adopterons le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centré au centre de la goutte.

Notons :

a : le rayon d'équilibre de la goutte

Φ_1 : le potentiel de vitesse du fluide 1

Φ_2 : le potentiel de vitesse du fluide 2

P_1 : la pression du côté intérieur du fluide 1
 P_2 : la pression du côté intérieur du fluide 2
 H : le rayon de la goutte

3.1.2 Équations générales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ \Delta\Phi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ P_1 + \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ P_2 + \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} H = \nabla\Phi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ \frac{\partial}{\partial t} H = -\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ P_2 - P_1 = \sigma \mathcal{C} & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition dynamique)} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où

σ : le coefficient de tension superficielle
 \mathcal{C} : la courbure moyenne de l'interface

3.1.3 Décomposition modale

On considère maintenant l'oscillation linéaire d'une goutte sphérique par rapport à la position d'équilibre :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{10} + \varphi_1(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ \Phi_2 &= \Phi_{20} + \varphi_2(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ P_1 &= P_{10} + p_1(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ P_2 &= P_{20} + p_2(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t} \\ H &= a + \varepsilon \eta(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Pour la courbe, on a

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \varepsilon \mathcal{C}_1 + o(\varepsilon^2)$$

où

$$\mathcal{C}_1 = - \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \right) \right] e^{-i\omega t}.$$

3.1.4 Linéarisation des équations

La linéarisation des équations s'effectue en remplaçant dans le système d'équations d'équilibre (3.2) le potentiel de vitesse, le champ de pression et la courbure par leur décomposition, puis en conservant uniquement les termes d'ordre 1 par rapport aux petites perturbation introduites. Nous obtenons ainsi le problème linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ \Delta\varphi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ p_1 + \lambda \rho_1 \varphi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ p_2 + \lambda \rho_2 \varphi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ \lambda \eta = \nabla\varphi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ \lambda \eta = -\nabla\varphi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi_2 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ p_2 - p_1 = -\sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \right) \right] & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition dynamique)} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Avec $\lambda = -i\omega t$ les valeurs propre recherchés.

3.2 Modélisation numérique

3.2.1 Formulation variationnelle

Pour l'implémentation de ces équations sous FreeFem++ il convient de mettre en place une formulation variationnelle (ou formulation faible). Pour cela, introduit des fonction test $\varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*$ associées à $\varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \eta$, où (φ_1^*, p_1^*) définis sur Ω_1 , (φ_2^*, p_2^*) définis sur Ω_2 , η^* défini sur S .

La formulation variationnelle du problème (3.3) se met alors en plusieurs étapes. Dans un premiers temps, on multiplie scalairement les équation du problème (3.3) par leur fonction test associée :

$$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \varphi_1) \cdot \varphi_1^* = 0 \\ (\Delta \varphi_2) \cdot \varphi_2^* = 0 \\ (p_1 + \lambda \rho_1 \varphi_1) \cdot p_1^* = 0 \\ (p_2 + \lambda \rho_2 \varphi_2) \cdot p_2^* = 0 \\ (p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right]) \cdot \eta^* = 0 \end{array} \right.$$

Ensuite, on intègres ces trois équations. On obtient alors :

$$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = 0 \\ (\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_2} = 0 \\ (-p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (-p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, la condition cinématique est introduite au sein de cette formulation grâce à la formule de Green s'écrit :

$$\forall \varphi_1^*,$$

$$(\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = -(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} + \langle \nabla \varphi_1 \cdot \vec{n}, \varphi_1^* \rangle_S$$

$$\forall \varphi_2^*,$$

$$(\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -(\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} + \langle \nabla \varphi_2 \cdot \vec{n}, \varphi_2^* \rangle_S$$

Or la condition cinématique donne $\lambda \eta = \nabla \varphi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1$ et $\lambda \eta = -\nabla \varphi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi_2$. On obtient donc :

$$\forall \varphi^*,$$

$$(\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = -(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} + \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S$$

$$\forall \varphi^*,$$

$$(\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_1} = -(\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} - \lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S$$

On en déduit alors la formulation faible du problème (3.3) :

$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} = \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S \\ -(p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -\lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S \\ -(p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On sait que

$$\langle \sigma \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta), \eta^* \rangle_S = - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S$$

On peut simplifier la formulation (3.4) comme la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} = \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S \\ -(p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -\lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S \\ -(p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \frac{2}{a^2} \eta, \eta^* \rangle_S - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.2.2 Écriture du problème sous forme matricielle

On peut mettre la formulation variationnelle (3.5) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & B_{15} \\ B_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{35} \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.3 Validation du code

Pour comparer les données expérimentales de F. Risso, il faut choisir les valeurs pour tous les paramètres comme le tableau suivant (propriétés de l'eau à $25^{\circ}C$) :

	eau	n-heptane
Masse volumique $\rho(kg \cdot m^{-3})$	997	680
Viscosité $\mu(Pa \cdot s)$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$0.4 \cdot 10^{-3}$
Tension superficielle $\sigma(N \cdot m^{-1})$	$47 \cdot 10^{-3}$	

où le fluide 1 est n-heptane et le fluide 2 est eau.

3.3.1 Cas sans contrainte

Dans les cas $2a = d = 4.19mm$:

Mode	$\omega_2/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_3/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_4/2\pi(\text{Hz})$
$N = 1159$	27.9	52.7	80.7
$N = 4668$	27.7	52.3	79.7
$N = 10803$	27.7	52.2	79.5
$N = 18797$	27.7	52.1	79.5
$N = 29706$	27.7	52.1	79.4
Théorique	27.7	52.1	79.4

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

Dans les cas $2a = d = 4.48mm$:

Mode	$\omega_2/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_3/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_4/2\pi(\text{Hz})$
$N = 1135$	25.2	47.7	73.1
$N = 4679$	25.1	47.3	72.1
$N = 10644$	25.1	47.2	71.9
$N = 18757$	25.1	47.2	71.9
$N = 29486$	25.1	47.1	71.8
Théorique	25.1	47.1	71.8

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

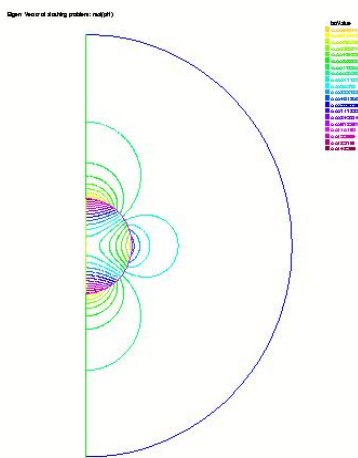


Figure 3.1: potentiel de vitesse ω_2

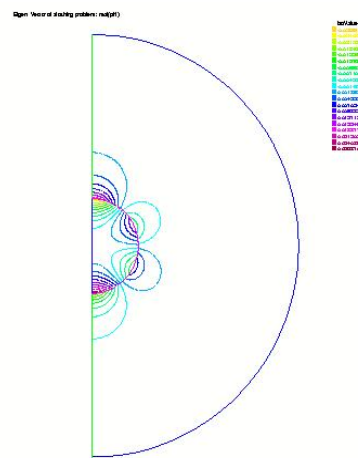


Figure 3.2: potentiel de vitesse ω_3

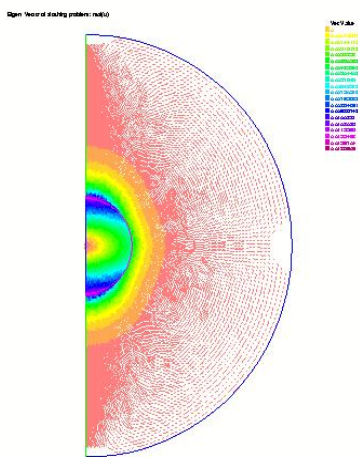


Figure 3.3: champ de vitesse ω_2

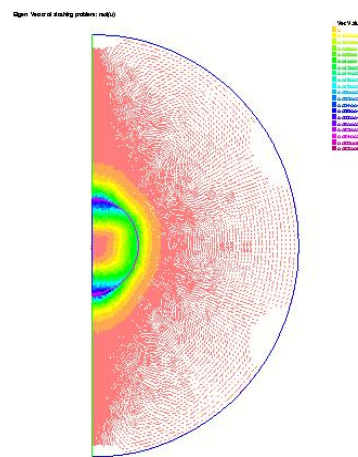
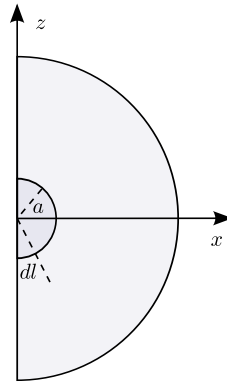


Figure 3.4: champ de vitesse ω_3

Dans les cas $2a = d = 4.48mm$, on choisit le nombre de triangles $N = 10644$, visualise et compare le potentiel de vitesse et le champ de vitesse pour le deuxième mode $\omega_2/2\pi = 25.1$ et le troisième mode $\omega_3/2\pi = 47.1$.

3.3.2 Cas avec contrainte

Pour comparer les données expérimentales de F. Risso, une goutte attachée à un tube capillaire, on coupe le ligne surface au fond et défini une condition limite que le déplacement de dl est nul.



On va étudier la relation entre la longueur de contrainte dl et la mode du goutte.

Dans les cas $2a = d = 4.19mm$:

Mode		$\omega_2/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_3/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_4/2\pi(\text{Hz})$
$dl = 0.1$	$N = 10883$	31.3	56.6	84.9
$dl = 0.01$	$N = 10659$	29.8	54.6	82.4
$dl = 0.001$	$N = 10727$	29.6	54.3	82.0
$dl = 0.0004$	$N = 10899$	29.6	54.3	82.0
$dl = 0.0001$	$N = 10863$	nul	nul	nul

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

Dans les cas $2a = d = 4.48mm$:

Mode		$\omega_2/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_3/2\pi(\text{Hz})$	$\omega_4/2\pi(\text{Hz})$
$dl = 0.1$	$N = 10772$	28.2	51.1	76.7
$dl = 0.01$	$N = 10678$	26.9	49.4	74.5
$dl = 0.001$	$N = 10578$	26.8	49.1	74.2
$dl = 0.0004$	$N = 10606$	26.7	49.1	74.2
$dl = 0.0001$	$N = 10642$	nul	nul	nul

Avec N le nombre de triangles constituant le maillage.

Chapitre 4

Une goutte attachée à un tube capillaire non visqueux

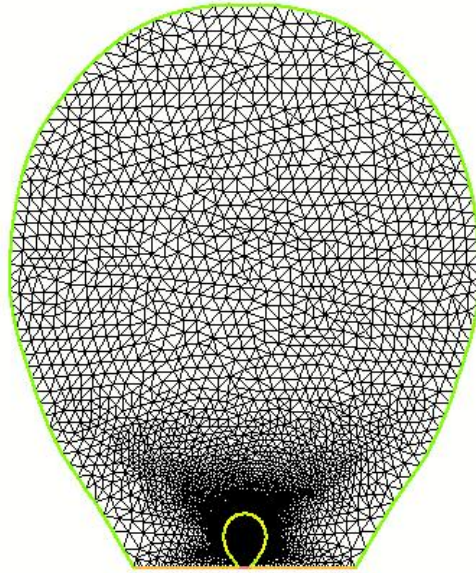
Dans ce chapitre, on va chercher les modes d'une goutte heptane attachée à un tube capillaire dans l'eau, où la rayon du tube est $1.2mm$. Dans ce but, il faut reconstruire le maillage, redéfinir la courbure, de plus, ajouter les effets de la gravité.



Figure 4.1: Image d'une goutte heptane attachée à un tube capillaire dans l'eau, $\sigma \approx 40 \left[\frac{mN}{m} \right]$. (Rapport de Master, G.J. Oosterbaan, IMFT)

4.1 Position du problème

4.1.1 Étude du champ de base



Nous adopterons le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Notons :

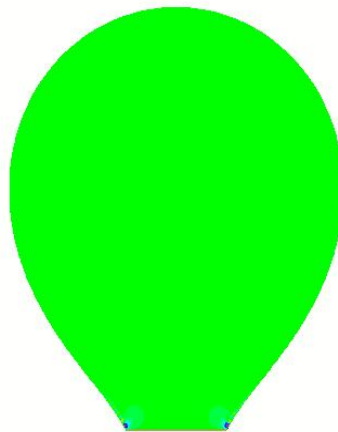
Φ_1 : le potentiel de vitesse du fluide 1

Φ_2 : le potentiel de vitesse du fluide 2

P_1 : la pression du côté intérieur du fluide 1

P_2 : la pression du côté intérieur du fluide 2

On zoome l'image de la goutte comme au-dessous :



4.1.2 Équations générales

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ \Delta\Phi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ P_1 + \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ P_2 + \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} H = \nabla\Phi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ \frac{\partial}{\partial t} H = -\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi_2 & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition cinématique)} \\ P_2 - P_1 + \Delta\rho g z = \sigma K & \text{sur la surface libre } S \text{ (Condition dynamique)} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

σ : le coefficient de tension superficielle

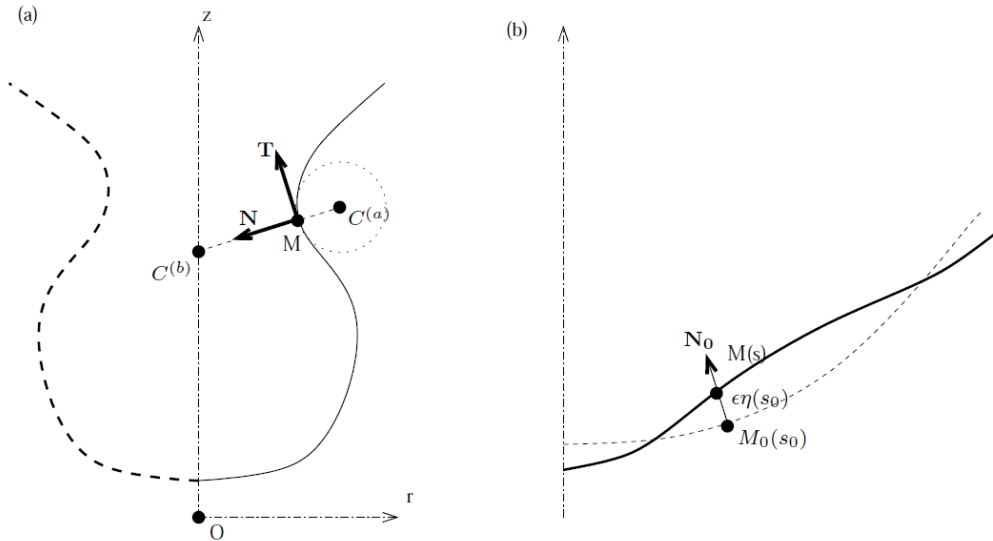
K : la courbure moyenne de l'interface

$$\Delta\rho = P_2 - P_1$$

4.1.3 Décomposition modale

On considère maintenant l'oscillation linéaire d'une goutte par rapport à la position d'équilibre :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{10} + \varphi_1(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \\ \Phi_2 &= \Phi_{20} + \varphi_2(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \\ P_1 &= P_{10} + p_1(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \\ P_2 &= P_{20} + p_2(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$



On suppose que la forme moyenne de l'interface est donnée par un paramétrage de la forme $M_0(s_0)$, où s_0 est l'abscisse curviligne associée. On note T_0 , N_0 , K_0 les vecteurs tangents, normal, et la courbure associée. Ceux-ci sont donnés par :

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial O\vec{M}_0}{\partial s_0}$$

$$K_0 = K_0^{(a)} + K_0^{(b)} = \mathbf{T}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial s_0} + \frac{N_{0,r}}{r}$$

On suppose maintenant que la surface oscille faiblement autour de la forme moyenne précédemment définie (voir figure b).

On choisit de paramétrer la déformation de la manière suivante :

$$O\vec{M}(s_0) = O\vec{M}_0(s_0) + \varepsilon \eta(s_0) \mathbf{N}_0 e^{-i\omega t}$$

D'après le travail de D. Fabre, *Calcul de la courbure* joint dans la Annexes, on sait que

$$K = K_0 + \varepsilon K_1$$

où

$$K_0 = \mathbf{T}_0 \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial s_0} + \frac{N_{0,r}}{r}$$

$$K_1 = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s_0} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) + \left(\left| \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial s_0} \right|^2 + \frac{N_{0,r}^2}{r^2} \right) \eta \right] e^{-i\omega t}.$$

4.1.4 Linéarisation des équations

La linéarisation des équations s'effectue en remplaçant dans le système d'équations d'équilibre (4.1) le potentiel de vitesse, le champ de pression et la courbure par leur décomposition, puis en conservant uniquement les termes d'ordre 1 par rapport aux petites perturbation introduites. Nous obtenons ainsi le problème linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ \Delta \varphi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ p_1 + \lambda \rho_1 \varphi_1 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_1 \\ p_2 + \lambda \rho_2 \varphi_2 = 0 & \text{dans le volume } \Omega_2 \\ \lambda \eta = \nabla \varphi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 & \text{sur la surface libre } S \\ \lambda \eta = -\nabla \varphi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi_2 & \text{sur la surface libre } S \\ p_2 - p_1 + \Delta \rho g \eta \cdot \vec{e}_z = -\sigma \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s_0} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) + \left(\left| \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial s_0} \right|^2 + \frac{N_{0,r}^2}{r^2} \right) \eta \right] & \text{sur la surface libre } S \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Avec $\lambda = -i\omega t$ les valeurs propre recherchés.

4.2 Modélisation numérique

4.2.1 Formulation variationnelle

Pour l'implémentation de ces équations sous FreeFem++ il convient de mettre en place une formulation variationnelle (ou formulation faible). Pour cela, on introduit des fonctions test $\varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*$ associées à $\varphi_1, \varphi_2, p_1, p_2, \eta$, où (φ_1^*, p_1^*) définis sur Ω_1 , (φ_2^*, p_2^*) définis sur Ω_2 , η^* défini sur S .

La formulation variationnelle du problème (4.2) se met alors en plusieurs étapes. Dans un premiers temps, on multiplie scalairement les équations du problème (4.2) par leur fonction test associée :

$$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^* \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta \varphi_1) \cdot \varphi_1^* = 0 \\ (\Delta \varphi_2) \cdot \varphi_2^* = 0 \\ (p_1 + \lambda \rho_1 \varphi_1) \cdot p_1^* = 0 \\ (p_2 + \lambda \rho_2 \varphi_2) \cdot p_2^* = 0 \\ (p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right]) \cdot \eta^* = 0 \end{array} \right.$$

Ensuite, on intègre ces trois équations. On obtient alors :

$$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^* \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = 0 \\ (\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_2} = 0 \\ (-p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (-p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right.$$

Enfin, la condition cinématique est introduite au sein de cette formulation grâce à la formule de Green s'écrit :

$$\forall \varphi_1^*, \quad (\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = -(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} + \langle \nabla \varphi_1 \cdot \vec{n}, \varphi_1^* \rangle_S$$

$$\forall \varphi_2^*, \quad (\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -(\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} + \langle \nabla \varphi_2 \cdot \vec{n}, \varphi_2^* \rangle_S$$

Or la condition cinématique donne $\lambda \eta = \nabla \varphi_1 \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1$ et $\lambda \eta = -\nabla \varphi_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial}{\partial r} \varphi_2$. On obtient donc :

$$\forall \varphi_1^*, \quad (\Delta \varphi_1, \varphi_1^*)_{\Omega_1} = -(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} + \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S$$

$$\forall \varphi_2^*, \quad (\Delta \varphi_2, \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -(\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} - \lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S$$

On en déduit alors la formulation faible du problème (4.2) :

$$\forall \varphi_1^*, \varphi_2^*, p_1^*, p_2^*, \eta^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} = \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S \\ -(p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -\lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S \\ -(p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \left[\frac{2}{a^2} \eta + \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta) \right], \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

On sait que

$$\langle \sigma \frac{1}{a^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta), \eta^* \rangle_S = - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S$$

On peut simplifier la formulation (4.3) comme la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1^*)_{\Omega_1} = \lambda \langle \eta, \varphi_1^* \rangle_S \\ -(p_1, p_1^*)_{\Omega_1} = \lambda (\rho_1 \varphi_1, p_1^*)_{\Omega_1} \\ (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2^*)_{\Omega_2} = -\lambda \langle \eta, \varphi_2^* \rangle_S \\ -(p_2, p_2^*)_{\Omega_2} = \lambda (\rho_2 \varphi_2, p_2^*)_{\Omega_2} \\ \langle p_2 - p_1 + \sigma \frac{2}{a^2} \eta, \eta^* \rangle_S - \langle \sigma \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta, \frac{\partial}{\partial \theta} \eta^* \rangle_S = 0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

4.2.2 Écriture du problème sous forme matricielle

On peut mettre la formulation variationnelle (4.4) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & B_{15} \\ B_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{35} \\ 0 & 0 & B_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Chapitre 5

Conclusion

Chapitre 6

Annexes